東京大学　理科　数学

総　論

満　点	120 点	**目標得点**	75 点	**試験時間**	150 分	**偏差値**	理Ⅰ・理Ⅱ:71 理Ⅲ:75
大問数	6	**小問数**	13				
〔解答形式〕		**マーク式**	0/13 問	**短答式**	0/13 問	**記述式**	13/13 問
〔問題難易度〕		**C**	1/13 問	**B**	7/13 問	**A**	5/13 問
※問題難易度：C難問，B合否を分ける問題，A正答すべき問題，を示す							

Topics

1：全体的にはやや易化。多少の難易はあるが，東大として標準レベルの問題が出題された。
2：東大らしい整数，確率，空間図形の問題は今年も出題された。
3：正当なアプローチ・確実な計算力が必要な問題が増え，差のつきやすい出題であった。

こんな力が求められる！

東大の入試問題は難しいか？

東京大学が「数学という科目の在り方」「数学の学習の仕方」などをどのように考えているのか，それを表現しているものが，東大の入試問題である。

今年の東大入試はやや易化したように見えるが，それでも入試では十分に差がついたであろう。何を・どのように・どうやって学習していけばよいのであろうか。

普段，問題を解く際には「なぜその問題が解けたのか？」を大切にしておくことが重要である。問題を解く際には，定性・定量・図象・定式を適宜使い分けることになるが，どのような「戦略」を使って解いているのかを自己認識できていなければならない。

数学の問題を解く際の定石がいくつかある。まずはその定石を身につけなければ始まらない。定石を身につけた者だからこそ，問題の普遍性・特殊性を見抜き，適切なアプローチによって，答を導くことができる。

具体的な分野に話を移そう。

整数，確率といった離散的な値を扱う問題において，題意を正確に把握する力を養いたい。

確率においてはその原因となる実験や観察を「試行」と呼ぶ。試してみることが大事なのである。しかし試験の最中に具体的な実験は当然のことながらできない。頭の中，あるいは紙の上で試みることが必要となる。具体から抽象への思考力を養っておくことが大切である。

さらには，空間図形は立体的にイメージ出来るかが大事である。空間図形の問題を解くときに見取り図１つだけ描いて解決する問題は少ない。図が動く問題，複数の図形が関わる問題では，投影図，断面図，側面図，展開図などを使い分けることが必要である。

また，キレイな結果が得られたときにその美しさに感動し，条件を変えてもキレイなままなのか，つまり，一般的法則として必然的にキレイな結果が得られるのか，あるいは，その問題の条件が上手く定められているからキレイな結果が得られるのかを確認することも大切である。上手く定められた他の条件を探したり，問題の条件を上手く定める方法を一般化したりすることも，大いに実力養成に役立つはずである。

入試問題は必ず答が出る（証明ができる）問題である。偶然解けるのではなく，解く必然性を意識しながら学習を進めていけば，自ずと問題を解く力がついてくるはずである。

大問別分析

【第１問】

予想配点　20/120 点	**時間配分の目安**　20/150 分
問題形式　記述式	
出題分野　立体図形，微分積分	
出題形式　(1)計算　(2)計算	
小問別難易度 (1) A　(2) B ※問題難易度：C 難問，B 合否を分ける問題，A 正答すべき問題，を示す	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 多変数関数の処理について，「高３東大理系数学」では２学期（９月期～12 月期）の授業で扱っている。また，「高３ハイレベル数学ⅠＡⅡＢ」の夏期講習でも扱っている。	

●本大問の特徴・概要

(1)は，直方体を回転させたときにできた立体がどのような形をしているかを把握できれば，単にその体積を求めるだけの絶対に落とせない易問である。

それに対して，(2)は多変数関数の処理に慣れていない受験生にとっては厄介な問題であった。しかし，多変数関数の処理の問題は東大などの難関大学では頻出問題であるため，何度か経験をしているはずである。定石にしておきたい手法は

①１文字固定

②代入し変数を減らす

③対称式として処理

④領域内の最大最小／線形計画法

の４つがある。

この点から考えると，東大・理科に合格したい受験生ならば，確実に解いてほしい問題である。ちなみに，お茶ゼミ「高３東大理系数学」でも多変数関数についてはじっくりと扱っている。

●注目すべき小問

(1)　この小問についてはコメントすら不要と思われるが，敢えてポイントに触れるなら

・空間図形の図が描けるか

・図形の動きをトレースできるか

の２点である。

(2)　V の体積は $v=\left\{\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac\right\}b$ とかけるので，$a+b+c=1$ を考えて，b を $0<b<1$ の範囲で固定することで，a と c の対称式を処理することになる。

計算方法は色々とあるが，対称式なので，最大値や最小値の一方は $a=c$ のときにとる可能性が高いことに注目できたか，さらには値域の下限が 0 である（$\leftarrow a,b,c$ のいずれかが限りなく 0 に近いとき）ことにも即座に気づけたかによって，計算結果に安心できるはずである。

【第２問】

予想配点　20/120 点	**時間配分の目安**　20/150 分
問題形式　記述式	
出題分野　積分法	
出題形式　(1)証明　(2)証明	
小問別難易度 (1) B　(2) B ※問題難易度：Ｃ難問，Ｂ合否を分ける問題，Ａ正答すべき問題，を示す	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 定積分と不等式について，「高３東大理系数学」「高３ハイレベル理系数学」では２学期（９月期～12月期）の授業に扱っている。	

●本大問の特徴・概要

本大問は「定積分と不等式」という，難関大入試で好まれる典型問題である。どのような形であれ，受験生ならば一度は触れている（いや，難関大を受ける受験生ならば，何度も練習している）問題である。

(1)は上手い解法が見つからなくても，計算量はさほど多くない。確実に得点しておきたい問題である。それに対して(2)は，(1)をどのように解答したかによって気づくタイミングが異なるが，(1)の不等式の中辺は積分計算可能であるから，その計算結果と(2)の不等式に登場している和の形を見れば，何を実行すべきかが分かる。これは，類題経験がものをいう問題である。

●注目すべき小問

(1)　今回の問題であれば，証明方法は

　①　被積分関数の大小関係を評価する

　②　面積の大小関係で評価する

　③　不等式の中辺を積分計算して，右辺－中辺，中辺－左辺の符号を調べる

の３つがあげられる。基本的には①と②の解法のどちらかで処理をすることが多いが，この２つの解法が思いつかなくても，今回は中辺が実際に積分計算できる形であるから，「泥臭く計算する」（③の解法）というのも一つの有効な手段ではある。

(2)　中辺に対数が含まれているところから，(2)の中辺を実際に積分計算すればよいとわかる。計算結果には対数の差の形が登場するので，その形を利用して和を計算することにもすぐに気づきたい。その際には，「２乗の逆数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が無限大に発散しない」…（＊）という有名問題を解いたことがあれば最後の不等式評価の手法に困らないはずである。この不等式処理こそ，差のつく問題である。

[(＊)の略解]

$\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{(n-1)n}$ より $\displaystyle\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{(n-1)n}$ が成立し，さらに両辺に $\dfrac{1}{1^2}$ を加えれば

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}<1+\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{(n-1)n}=2-\frac{1}{m}$$

を満たす．$m\to\infty$ とすると，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<2$ を満たすことから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は無限大に発散しない（略解終）

【第３問】

予想配点　20/120 点	**時間配分の目安**　30/150 分
問題形式　記述式	
出題分野　確率，漸化式	
出題形式　(1) 計算　(2) 計算　(3) 計算	
小問別難易度 (1) C　(2) A　(3) A　　注：(2)(3) は (1) が正解した場合，容易という意味。 ※問題難易度：C 難問，B 合否を分ける問題，A 正答すべき問題，を示す	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 確率と漸化式の融合問題は夏期講習「確率・数列攻略」で扱っている。さらに，「高３東大理系数学」でも７月期で学習をしている。	

●本大問の特徴・概要

東大の確率の問題は，操作の規則を把握できることが第一歩である。x による場合分け，２回目以降の試行からの立式など，クリアすべきポイントが数多く設定されている意味で，難問である。

抽象的な問題文から把握することは難しいため，多くの人は実験をすることによって具体化し，題意を掴むことが大切になる。今回の問題については，注目すべき小問のところで詳しく述べる。

(2)(3)は，(1)の漸化式さえ立っていればそれほど難しい問題ではないため，(1)ができた人へのサービス問題である。

●注目すべき小問

注目すべき小問はもちろん，(1)である．この問題文を一読して，この試行を理解できる受験生は稀であろう。まずは具体例での実験をできるかが最初の鍵である。少し解説しよう。

まず，問題文の

「m 回の操作の後，箱Ｌのボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする」

という意味だが，x は箱Ｌに最初入っていたボールの個数であり，m 回後に箱Ｌに入っているボールが 30 個になる確率を意味する。つまり，“m 回の操作におけるボールの個数の推移”を考えることになる。このことを意識して樹形図を書けば，$P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$ であることは容易に確認できるはずである。さらに，x に具体的な値を与えて，コインの表裏による樹形図を書くと全体像が見えてくるはずである。

樹形図を書いて気づくべきことは

箱Ｌに入っているボールが 30 or 0 になると，以後箱Ｌのボールの個数は変化しない

ということである。また，問題では

「$P_m(x)$ を，（適当な y を選んで） $P_{m-1}(y)$ で表せ」

と書いてあるが，これは「m 回の操作を $1+(m-1)$ 回と分けなさい」と言っているのと同じであり，回数を重ねるごとにボールの個数が変化し，y は（スタートの個数である） x に依存するものであるから，最初の１回で場合分けをする手法で漸化式を立てるとよいことになる。

いずれにせよ，この問題は試験場では難問に見えた受験生が多かったであろう。２項間の確率漸化式には「１回目以降，２回目以降の試行から式を立てるタイプ」と「n 回目まで，$n+1$ 回目までの試行から式

を立てるタイプ」がある。両者の使い分けには注意をしておきたい。

【第４問】

予想配点　20/120 点	**時間配分の目安**　20/150 分
問題形式　記述式	
出題分野　積分法	
出題形式　(1) 証明　(2) 計算	
小問別難易度 (1) A　(2) B ※問題難易度：C 難問，B 合否を分ける問題，A 正答すべき問題，を示す	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 双曲線関数に関して，「高３東大理系数学」では２学期の授業で扱っている。	

●本大問の特徴・概要

(1)は座標平面上の三角形の面積の公式に代入するだけで，易問である。

(2)は y 軸にそっての積分であることは問題文の「y_1，y_2 を用いて表せ。」からわかり，それがわかれば(1)の使い方もわかるので，正しく計算できれば難しくはない問題である。

このような「迷わず解答できそうな問題」こそ，確実に正解すべき問題であるが，着眼点に気づかず，地道な計算をしてしまうことで時間ばかりがかかってしまう受験生も少なくはない。特に，(1)の図示に関しては，瞬時にできることが望ましい。

●注目すべき小問

増減表がないとグラフを描けない人は少し時間がかかる問題かもしれないが，式の形から漸近線の方程式は見てとってほしい。

つまり，$\lim_{x\to-\infty}(y-0)=0$，$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=0$ に気づき，漸近線は $y=0, y=x$ の２本。そして，漸近線が２本あることから，曲線は双曲線だと気付いてほしい。

また，$(ax+by)^2-(cx+dy)^2=1$（ただし $a=b=0, c=d=0, a=c=0, b=d=0$ の場合を除く）の形式で表される曲線は双曲線であることも知っていて損はない。

【第５問】

予想配点　20/120 点	**時間配分の目安**　25/150 分
問題形式　記述式	
出題分野　整数問題	
出題形式　計算	
小問別難易度 B ※問題難易度：Ｃ難問，Ｂ合否を分ける問題，Ａ正答すべき問題，を示す	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 整数問題は夏期講習「整数攻略」で扱っている。また，「高３東大理系数学」では９月期に整数問題を深く取り扱っている。	

●本大問の特徴・概要

本大問では，直角二等辺三角形をどのように捉えるかがすべてである。

△PQR が PR を斜辺（∠PQR＝90°）とする直角二等辺三角形であるための条件は

・PR が円 C の直径

かつ

・Q が孤 PR の中点

である。

このあとは，どの解き方をしても，“しらみつぶし”の作業は生じてくるので，いかに効率よく，すべての場合を漏らさず数え上げられるかがポイントである。

●注目すべき小問

本問題から，中学受験によくある時計の短針と長針の問題を思い起こさせる。

「短針と長針が重なってから，最初に一直線になるまでの時間を求めよ」…（＊）

m の値さえ与えられていたら，本問は，問題（＊）と本質はなんら変わらない。

今回，m の値は 10 通りしかないのだから，m の値ごとに“しらみつぶし”に調べていけばよいことになる。

あるいは，点 P を無視すれば本問は問題（＊）と本質はなんら変わらない。であるならば，∠QOR が直角になる時刻 t を求め，そこから m の値を求めればいいのである。

よく勉強している受験生はこの問題を合同式で解こうとするだろう。しかし，合同式はそれを用いなければ解きにくい問題に使えばいいのであって，そうでない限りは，もっと泥臭いと思える他の手段を先に考えたほうがよいときもある。道具の使い分けは大切にしよう。敢えて難しく解く必要はないのである。

【第６問】

予想配点　20/120 点	**時間配分の目安**　35/150 分
問題形式　記述式	
出題分野　ベクトル	
出題形式　(1) 計算　(2) 計算　(3) 計算	
小問別難易度 (1) A　(2) B　(3) B ※問題難易度：C 難問，B 合否を分ける問題，A 正答すべき問題，を示す	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 空間ベクトルのついては，「高３東大理系数学」「高３ハイレベル理系数学」で１学期に基礎概念を扱い，２学期には実戦力を高める問題で確認をしている。	

●本大問の特徴・概要

第１問に続き，空間の問題である。

(1)は点 C から平面 OAB に下ろした垂線の足を H とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ で表すという，高校の定期考査でも出されるレベルの典型問題。これは落とせない。

(2)は東大にしては珍しく，計算が煩雑なだけの問題。「上手く解けるかも？」と色気を出したら負けであり，地道に着実に計算することが大切な問題であった。(3)は(2)ができた人へのサービス問題で，難なく解けるはずである。

●注目すべき小問

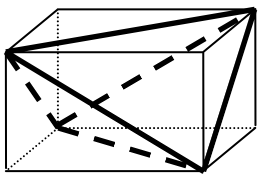
(2)は四面体を真上から見た図が描ければ，解き方の方針はすぐに立つ。しかし，その先で，この問題を解いた誰もが，「面倒くさい」と感じたのではないだろうか。

その気持ちに負けずに，粘り強く着実に計算を進めた受験生は，間違いなくこの大問は完答できただろうし，負けてしまった人は得点できなかった。ただ，それだけになる。

東大に合格したいのであれば，このくらいの計算量に耐える計算力が必要であり，カッコ良い，スマートな解法を考えることも大切なことだが，試験場では点数を取ってなんぼである。地道で正確な計算量，それに耐える力，諦めない気持ちを持っている受験生に合格してほしいという東大の訴えかもしれない。

注：この問題では使わないが，以下の知識も問題によっては有効である。

「等面四面体は直方体の中に埋め込むことができる」



また，等面四面体では展開図の垂心が頂点からおろした垂線の足に一致する。