

未来の東大理科数学 ①

1

(1) 数直線上の点 x が (性質 I_1) を満たすとは,

有理数 p, q について, $p \neq q$ ならば, p と x の距離と q と x の距離が異なる
が成り立つことをいう. x が (性質 I_1) を満たす必要十分条件を述べよ.

(2) 座標平面上の点 $X(x, y)$ が (性質 I_2) を満たすとは,

有理数 p_1, p_2, q_1, q_2 について, $P(p_1, p_2) \neq Q(q_1, q_2)$ ならば, $PX \neq QX$
が成り立つことをいう. 点 $(\pi, 1)$ は (性質 I_2) を満たすかどうか答えよ. ただし, 円周率 π が
無理数であることは用いてよい.

(3) 座標空間上の点 $X(x, y, z)$ が (性質 I_3) を満たすとは,

有理数 $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ について, $P(p_1, p_2, p_3) \neq Q(q_1, q_2, q_3)$
ならば, $PX \neq QX$
が成り立つことをいう. 点 $(\log_{10} 2, \log_{10} 3, \log_{10} 5)$ は (性質 I_3) を満たすかどうか答えよ. た
だし, 常用対数 $\log_{10} 2, \log_{10} 3, \log_{10} 5$ が無理数であることは用いてよい.

2 a を実数として, 無限数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めることができるとする.

(1) 定数 a のとり得る値の範囲を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(3) $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定める. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ を求めよ.