

総 論

満点	60点	目標得点	34点	試験時間	90分	偏差値	71
大問数	3	小問数	9				
	【解答形式】	マーク式	0/9問	短答式	4/9問	記述式	5/9問
	【問題難易度】	C	2/9問	B	2/9問	A	5/9問

※問題難易度：C難問、B可否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す

Topics

- 1：問題ごとに難易度の差が大きい（特に大問1）。大問2・3のような問題で前半の小問にまず手をつけておき、あとでじっくり大問1の各小問を見ていくのが有効。
- 2：第1問は07年度までマーク式であったが、08年度から短答式（空欄補充式）になった。
- 3：第3問は数列と整数の融合問題が出されることが多い。また、比較的難易度が高い。

こんな力が求められる！

他の大学・学部と比べても、過去問における対策がとりわけ有効である。思考力を養うために、同じ早稲田大学・商学部の問題を中心にじっくり考える練習をしていくとよい。

入試直前期には、「手をつける問題」「手をつけない問題」の見極めをしていく練習も必要となろう。難問に迂闊に手を出し、他の問題が取れないのは好ましくない。捨て問は捨て問として扱えばよい。

難関国私立大に共通の傾向と言えるが、整数問題についても対策を立てておくべきである。

大 問 別 分 析

【1】

予想配点	20 / 60 点	時間配分の目安	50 / 90 分
出題分野	(1) 三角関数（数学Ⅱ） (2) 放物線と直線で囲まれる面積（数学Ⅱ） (3) 整数部分と小数部分（数学Ⅰ） (4) 空間座標（数学B）		
出題形式	計算		
小問別難易度	※問題難易度：C難問、B可否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す (1) A (2) A (3) B (4) C		
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連	(1) ハイレベル数学ⅠAⅡB3月期①4回、(2) ハイレベル数学ⅠAⅡB6月期3回		

●解答

(1)

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ であるから、 $8\cos^4 x + 8\sin^4 x = 5$ に代入すると

$$8\cos^4 x + 8\sin^4 x = 5$$

$$8(1 - \sin^2 x)^2 + 8\sin^4 x = 5$$

$$16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 3 = 0$$

Benesse お茶の水ゼミナール

$$(4\sin^2 x - 3)(4\sin^2 x - 1) = 0 \quad \text{より } \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ を満たす } x \text{ の値は } x = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

よって、これらの和は 8π

[備考]

$$x = \theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ が } 8\cos^4 x + 8\sin^4 x = 5 \text{ を満たすとき、}$$

$x = \pi - \theta, \pi + \theta, 2\pi - \theta$ も同じ方程式を満たす。

したがって、 $x = \theta$ なる解が 1 つ見つかるたびに、解の和は

$$\theta + (\pi - \theta) + (\pi + \theta) + (2\pi - \theta) = 4\pi$$

ずつ増加していく。

[別解]

$$\begin{aligned} 8\cos^4 x + 8\sin^4 x &= 8(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 16\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 8 - 4 \times (2\sin x \cos x)^2 = 8 - 4\sin^2 2x \quad \text{より} \end{aligned}$$

$\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ かつ $0 \leq 2x < 4\pi$ を満たす角度を求めればよい。ここまで変形を行う必然性はなさそうだが、

(2)

P, Q の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とする。

すると、求める面積は $\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ [空欄補充式の問題なので、これは自明として使ってよいと思われる。]

よって、 $\beta - \alpha$ の値が最大となるとき、面積は最大となる。

$PQ=1$ であることから、 $0 < \beta - \alpha \leq 1$ を満たす。

ここで、 $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ とすると、 $\beta - \alpha = 1$ であることから $\beta - \alpha$ は最大値 1 を取ることがある。

[単に $0 < \beta - \alpha \leq 1$ だから $\beta - \alpha$ の最大値 1. ではダメ。必ず $\beta - \alpha = 1$ となることを示すべき]

したがって、面積の最大値は $\frac{1}{6}$

(3)

$b = x - a$ であるから、 $a \leq x < a + 1$ より、 $0 \leq b = x - a < 1$ が成り立つ。

$$\text{一方、 } ab = 127(a + b) \text{ より } b = \frac{127a}{a - 127} \quad (a \neq 127)$$

[$a = 127$ のときは (左辺) - (右辺) = $127^2 \neq 0$ より不適]

これが $0 \leq b < 1$ を満たすことから、 $0 \leq \frac{127a}{a - 127} < 1$ を満たす整数 a を求める。

(i) $a > 127$ のとき

Benesse お茶の水ゼミナール

$0 \leq 127a < a - 127$ より $a \geq 0$ かつ $a < -\frac{127}{126}$ であるが、これを満たす a は存在しない。

(ii) $a < 127$ のとき

$a - 127 < 127a \leq 0$ より $a \leq 0$ かつ $a > -\frac{127}{126}$ であるが、これを満たすのは $a = -1$

これは $a < 127$ も満たしている。

このとき、 $b = \frac{-127}{-1-127} = \frac{127}{128}$ であるので、 $x = a + b = -1 + \frac{127}{128} = -\frac{1}{128}$

(4)

右図のように、一辺が1の立方体を積み上げてあるものを考える。 $A(1, 0, 2)$ 、 $B(0, 1, 1)$ が図のように取れる。ここで、 $OB = OB'$ となるような点 B' を z 軸負の部分に

取ると、 $OB = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

より $B'(0, 0, -\sqrt{2})$ と取れる。

$$\begin{aligned} \text{このとき、} PB^2 &= OP^2 + OB^2 \\ &= OP^2 + OB'^2 = PB'^2 \end{aligned}$$

だから $PB = PB'$ が成り立つ。

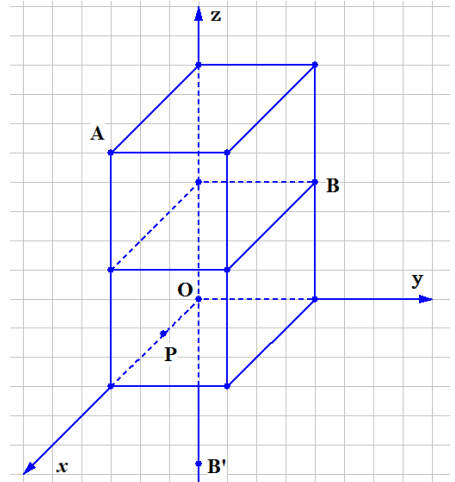
したがって、 $AP + PB = AP + PB' \geq AB'$

が成り立ち、最小値は AB' の長さに等しい（最小値は P が線分 AB' 上にあるとき）。

よって最小値は

$$AB' = \sqrt{(1-0)^2 + 0^2 + \{2 - (-\sqrt{2})\}^2} = \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}$$

（もちろん、 AP と PB をそれぞれ文字で表し、それを微分して最小値を求めることもできるが、数学 III の範囲であり計算もややこしい）



【2】

予想配点	20 / 60 点	時間配分の目安	30 / 90 分
出題分野	図形と方程式（数学Ⅱ）		
出題形式	計算		
小問別難易度	※問題難易度：C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す (1) A (2) B		
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連	ハイレベル数学ⅠAⅡB4月期3回		

●解答

$$\begin{cases} y = ax + 2a^2 & \cdots \textcircled{1} \\ ay = x + a^2 + a & \cdots \textcircled{2} \end{cases} \text{とする。}$$

(1) $\textcircled{1} \times a - \textcircled{2}$ より

Benesse® お茶の水ゼミナール

$$0 = (a^2 - 1)x + 2a^3 - a^2 - a \cdots \textcircled{3}$$

i) $a \neq \pm 1$ のとき

$a^2 - 1 \neq 0$ であるから $a^2 - 1$ で両辺を割ると、

$$0 = x + \frac{2a^2 + a}{a+1} \quad \text{より} \quad x = -\frac{2a^2 + a}{a+1}$$

①に代入して

$$y = a \times \left(-\frac{2a^2 + a}{a+1} \right) + 2a^2 = \frac{a^2}{a+1}$$

したがって共有点は $\left(-\frac{2a^2 + a}{a+1}, \frac{a^2}{a+1} \right)$

ii) $a = 1$ のとき

①、②に代入すると、共に $y = x + 2$ であるから、共有点は $y = x + 2$ 全体。

iii) $a = -1$ のとき

①に代入すると $y = -x + 2$ 、②に代入すると $y = -x$ であるから、2つの直線は平行であり共有点を持たない。

(2) (1)と同じ場合分けに基づいて考える。

i) $a \neq \pm 1$ のとき

x 座標が $-1 \leq x \leq 0$ の範囲を満たすのは $-1 \leq -\frac{2a^2 + a}{a+1} \leq 0$ のとき。

i)-1 $a+1 < 0$ のとき

分母を払うと

$$a+1 \leq 2a^2 + a \leq 0$$

$$\begin{cases} a+1 \leq 2a^2 + a \\ 2a^2 + a \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}, a \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \leq a \leq 0 \end{cases} \quad \text{だから条件を満たすような } a \text{ は存在しない。}$$

i)-2 $a+1 > 0$ (かつ $a \neq 1$) のとき

分母を払うと

$$a+1 \geq 2a^2 + a \geq 0$$

$$\begin{cases} a+1 \geq 2a^2 + a \\ 2a^2 + a \geq 0 \end{cases}$$

Benesse® お茶の水ゼミナール

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a \leq -\frac{1}{2}, a \geq 0 \end{cases}$$

だから条件を満たすような a は $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a \leq -\frac{1}{2}, 0 \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

これらは $a+1 > 0$ を満たしている。

さらに y 座標の条件も考える。

y 座標が $0 \leq y \leq 1$ の範囲を満たすのは $0 \leq \frac{a^2}{a+1} \leq 1$ のとき。

今は $a+1 > 0$ の条件で考えているので、分母を払うと $0 \leq a^2 \leq a+1$ 。

$a^2 \geq 0$ は常に満たしているので、 $a^2 \leq a+1$ を解いて $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

したがって、 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a \leq -\frac{1}{2}, 0 \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ と $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の両方を満たすような範囲、

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}, 0 \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときに $A \cap B$ は空集合とならず、条件に適する。

ii) $a=1$ のとき

共有点は $y=x+2$ 全体であるから、座標 $(-1, 1)$ のとき集合 B にも含まれている。

したがって $a=1$ は条件に適する。

以上より、 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}$ または $0 \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ または $a=1$

【3】

予想配点	20 / 60 点	時間配分の目安	40 / 90 分
出題分野	関数 (数学 I) ・ 数列 (数学 B)		
出題形式	計算		
小問別難易度	※問題難易度：C 難問、B 可否を分ける問題、A 正答すべき問題、を示す (1) A (2) A (3) C		

●解答

(1) 条件(ii)より $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2}$

Benesse® お茶の水ゼミナール

$$\text{条件(i)より } f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{よって } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{19}{8}$$

(2) 条件(ii)より

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(-\frac{4}{3}\right) + 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

これらの式の和より

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(-\frac{4}{3}\right) + 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) - 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \quad [\text{条件(i)より}]$$

$$= \frac{8}{27} - \frac{16}{3} + 4 - \frac{1}{3} + 1 = -\frac{10}{27}$$

(3) $x = a + b$ (a は整数、 b は $0 \leq b < 1$ を満たす小数) と表す。

$$f(x) = f(x-1) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)$$

$$f(-x+1) = f(-x) + 3(-x)^2 + 3(-x)$$

この2式を辺々引くことで

$$f(x) - f(-x+1) = f(x-1) - f(-x)$$

よって

$$f(x) + f(-x) = f(x-1) + f(-x+1) \quad \cdots (\ast)$$

(\ast) 式を繰り返し利用すると、

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= f(x-1) + f(-x+1) \\ &= \cdots = f(b) + f(-b) \end{aligned}$$

ここで、 $b = 0$ とすると $f(x) + f(-x) = 2f(0) = 0$

一方、 $0 < b < 1$ とすると

Benesse® お茶の水ゼミナール

$$f(x) + f(-x) = f(b) + f(-b)$$

$$= f(b) + f(1-b) - 3(-b)^2 - 3 \times (-b)$$

$$= b^3 + (1-b)^3 - 3b^2 + 3b = 1$$

よって、 x が整数以外るとき 1、整数のとき 0