早稲田大学　商学部　数学

総　論

満　点　60 点	**目標得点**　34 点	**試験時間**　90 分	**偏差値**　71
大問数　3	**小問数**　9		
〔解答形式〕	**マーク式**　0／9問	**短答式**　4／9問	**記述式**　5／9問
〔問題難易度〕	**C**　2／9問	**B**　2／9問	**A**　5／9問

※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す

Topics

１：問題ごとに難易度の差が大きい（特に大問１）。大問２・３のような問題で前半の小問にまず手をつけておき、あとでじっくり大問１の各小問を見ていくのが有効。

２：第１問は 07 年度までマーク式であったが、08 年度から短答式（空欄補充式）になった。

３：第３問は数列と整数の融合問題が出されることが多い。また、比較的難易度が高い。

こんな力が求められる！

他の大学・学部と比べても、過去問における対策がとりわけ有効である。思考力を養うために、同じ早稲田大学・商学部の問題を中心にじっくり考える練習をしていくとよい。

入試直前期には、「手をつける問題」「手をつけない問題」の見極めをしていく練習も必要となろう。難問に迂闊に手を出し、他の問題が取れないのは好ましくない。捨て問は捨て問として扱えばよい。

難関国私立大に共通の傾向と言えるが、整数問題についても対策を立てておくべきである。

大 問 別 分 析

【１】

予想配点　20 ／ 60　点	**時間配分の目安**　50 ／ 90　分
出題分野　（１）三角関数（数学Ⅱ） （２）放物線と直線で囲まれる面積（数学Ⅱ） （３）整数部分と小数部分（数学Ⅰ） （４）空間座標（数学Ｂ）	
出題形式　計算	
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す （１）Ａ　（２）Ａ　（３）Ｂ　（４）Ｃ	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 （１）ハイレベル数学ⅠＡⅡＢ３月期①４回、（２）ハイレベル数学ⅠＡⅡＢ６月期３回	

●解答

（１）

$\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ であるから、$8\cos^4 x + 8\sin^4 x = 5$ に代入すると

$8\cos^4 x + 8\sin^4 x = 5$

$8\left(1-\sin^2 x\right)^2 + 8\sin^4 x = 5$

$16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 3 = 0$

$\left(4\sin^2 x-3\right)\left(4\sin^2 x-1\right)=0$ より $\sin x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \pm\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x<2\pi$ を満たす x の値は $x=\dfrac{1}{6}\pi, \dfrac{1}{3}\pi, \dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{7}{6}\pi, \dfrac{4}{3}\pi, \dfrac{5}{3}\pi, \dfrac{11}{6}\pi$

よって、これらの和は 8π

〔備考〕

$x=\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が $8\cos^4 x+8\sin^4 x=5$ を満たすとき、

$x=\pi-\theta, \pi+\theta, 2\pi-\theta$ も同じ方程式を満たす。

したがって、 $x=\theta$ なる解が 1 つ見つかるたびに、解の和は

$$\theta+(\pi-\theta)+(\pi+\theta)+(2\pi-\theta)=4\pi$$

ずつ増加していく。

〔別解〕

$$8\cos^4 x+8\sin^4 x=8\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-16\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=8-4\times(2\sin x\cos x)^2=8-4\sin^2 2x \quad \text{より}$$

$\sin 2x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ かつ $0 \leqq 2x<4\pi$ を満たす角度を求めればよい。ここまで変形を行う必然性はなさそうだが。

（2）

P, Q の x 座標をそれぞれ $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とする。

すると、求める面積は $\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ ［空欄補充式の問題なので、これは自明として使ってよいと思われる。］

よって、 $\beta-\alpha$ の値が最大となるとき、面積は最大となる。

$\mathrm{PQ}=1$ であることから、 $0<\beta-\alpha \leqq 1$ を満たす。

ここで、$\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right), \mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ とすると、$\beta-\alpha=1$ であることから $\beta-\alpha$ は最大値 1 を取ることがある。

［単に $0<\beta-\alpha \leqq 1$ だから $\beta-\alpha$ の最大値 1. ではダメ。必ず $\beta-\alpha=1$ となることがあることを示すべき］

したがって、面積の最大値は $\dfrac{1}{6}$

（3）

$b=x-a$ であるから、 $a \leqq x<a+1$ より、 $0 \leqq b=x-a<1$ が成り立つ。

一方、 $ab=127(a+b)$ より $b=\dfrac{127a}{a-127}$ （ $a \neq 127$ ）

［ $a=127$ のときは（左辺）－（右辺）＝ $127^2 \neq 0$ より不適］

これが $0 \leqq b<1$ を満たすことから、 $0 \leqq \dfrac{127a}{a-127}<1$ を満たす整数 a を求める。

（i） $a>127$ のとき

$0 \leqq 127a < a-127$ より $a \geqq 0$ かつ $a < -\dfrac{127}{126}$ であるが、これを満たす a は存在しない。

（ii） $a < 127$ のとき

$a-127 < 127a \leqq 0$ より $a \leqq 0$ かつ $a > -\dfrac{127}{126}$ であるが、これを満たすのは $a=-1$

これは $a<127$ も満たしている。

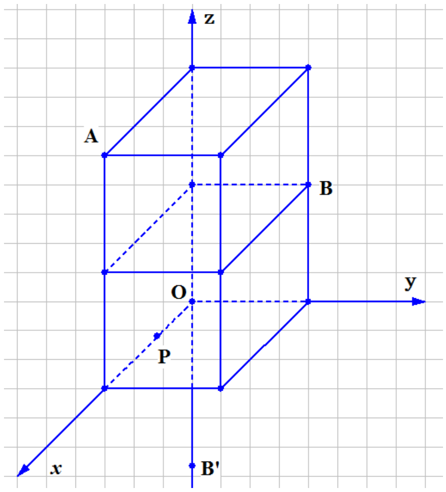
このとき、$b = \dfrac{-127}{-1-127} = \dfrac{127}{128}$ であるので、 $x = a+b = -1+\dfrac{127}{128} = -\dfrac{1}{128}$

（4）

右図のように、一辺が１の立方体を積み上げてあるものを考える。 $A(1,0,2)$ 、 $B(0,1,1)$ が図のように取れる。

ここで、 $OB = OB'$ となるような点 B' を z 軸負の部分に取ると、$OB=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$

より $B'(0,0,-\sqrt{2})$ と取れる。



このとき、 $PB^2 = OP^2 + OB^2$

$\qquad\qquad = OP^2 + OB'^2 = PB'^2$

だから $PB = PB'$ が成り立つ。

したがって、 $AP+PB = AP+PB' \geqq AB'$

が成り立ち、最小値は AB' の長さに等しい（最小値はＰが線分 AB' 上にあるとき）。

よって最小値は

$$AB' = \sqrt{(1-0)^2+0^2+\left\{2-(-\sqrt{2})\right\}^2} = \sqrt{7+4\sqrt{2}}$$

（もちろん、ＡＰとＰＢをそれぞれ文字で表し、それを微分して最小値を求めることもできるが、数学Ⅲの範囲であり計算もややこしい）

【２】

予想配点　20 ／ 60 点	**時間配分の目安**　30 ／ 90 分
出題分野　図形と方程式（数学Ⅱ）	
出題形式　計算	
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す　（１）Ａ　（２）Ｂ	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連　ハイレベル数学ⅠＡⅡＢ４月期３回	

●解答

$$\begin{cases} y = ax+2a^2 & \cdots ① \\ ay = x+a^2+a & \cdots ② \end{cases}$$ とする。

（１）　①× a －②より

$0=(a^2-1)x+2a^3-a^2-a \cdots$ ③

i）　$a\neq\pm1$ のとき

$a^2-1\neq0$ であるから a^2-1 で両辺を割ると、

$0=x+\dfrac{2a^2+a}{a+1}$　より　$x=-\dfrac{2a^2+a}{a+1}$

①に代入して

$$y=a\times\left(-\frac{2a^2+a}{a+1}\right)+2a^2=\frac{a^2}{a+1}$$

したがって共有点は $\left(-\dfrac{2a^2+a}{a+1},\dfrac{a^2}{a+1}\right)$

ii）　$a=1$ のとき

①、②に代入すると、共に $y=x+2$ であるから、共有点は $y=x+2$ 全体。

iii）　$a=-1$ のとき

①に代入すると $y=-x+2$、②に代入すると $y=-x$ であるから、２つの直線は平行であり共有点を持たない。

（２）（１）と同じ場合分けに基づいて考える。

i）　$a\neq\pm1$ のとき

x 座標が $-1\leqq x\leqq0$ の範囲を満たすのは $-1\leqq-\dfrac{2a^2+a}{a+1}\leqq0$ のとき。

i)-1　$a+1<0$ のとき

分母を払うと

$$a+1\leqq2a^2+a\leqq0$$

$$\begin{cases} a+1\leqq2a^2+a \\ 2a^2+a\leqq0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\leqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ a\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq0 \end{cases}$$

だから条件を満たすような a は存在しない。

i)-2　$a+1>0$（かつ $a\neq1$）のとき

分母を払うと

$$a+1\geqq2a^2+a\geqq0$$

$$\begin{cases} a+1\geqq2a^2+a \\ 2a^2+a\geqq0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ a \leqq -\dfrac{1}{2},\ a \geqq 0 \end{cases}$$

だから条件を満たすような a は $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq a \leqq -\dfrac{1}{2},\ 0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これらは $a+1>0$ を満たしている。

さらに y 座標の条件も考える。

y 座標が $0 \leqq y \leqq 1$ の範囲を満たすのは $0 \leqq \dfrac{a^2}{a+1} \leqq 1$ のとき。

今は $a+1>0$ の条件で考えているので、分母を払うと $0 \leqq a^2 \leqq a+1$。

$a^2 \geqq 0$ は常に満たしているので、$a^2 \leqq a+1$ を解いて $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

したがって、$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq a \leqq -\dfrac{1}{2},\ 0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ と $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の両方を満たすような範囲、

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq a \leqq -\dfrac{1}{2},\ 0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときに $A \cap B$ は空集合とならず、条件に適する。

ii)　$a=1$ のとき

共有点は $y=x+2$ 全体であるから、座標 $(-1,1)$ のとき集合 B にも含まれている。

したがって $a=1$ は条件に適する。

以上より、$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq a \leqq -\dfrac{1}{2}$　または　$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　または　$a=1$

【３】

予想配点　20 / 60 点	時間配分の目安　40 / 90 分
出題分野　関数（数学Ⅰ）・数列（数学Ｂ）	
出題形式　計算	
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す （１）Ａ　（２）Ａ　（３）Ｃ	

●解答

（１）　条件(ii)より $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) + 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \dfrac{1}{2}$

条件(i)より $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

よって $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{19}{8}$

（２）　条件(ii)より

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=f\left(-\frac{4}{3}\right)+3\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2+3\times\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

これらの式の和より

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(-\frac{4}{3}\right)+3\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2+3\times\left(-\frac{4}{3}\right)+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$ ［条件(i)より］

$$=\frac{8}{27}-\frac{16}{3}+4-\frac{1}{3}+1=-\frac{10}{27}$$

（３）　$x=a+b$　（a は整数、b は $0\leqq b<1$ を満たす小数）と表す。

$$f(x)=f(x-1)+3(x-1)^2+3(x-1)$$

$$f(-x+1)=f(-x)+3(-x)^2+3\times(-x)$$

この２式を辺々引くことで

$$f(x)-f(-x+1)=f(x-1)-f(-x)$$

よって

$$f(x)+f(-x)=f(x-1)+f(-x+1)\quad\cdot\cdot\cdot\quad(※)$$

（※）式を繰り返し利用すると、

$$f(x)+f(-x)=f(x-1)+f(-x+1)$$
$$=\cdots=f(b)+f(-b)$$

ここで、$b=0$ とすると $f(x)+f(-x)=2f(0)=0$

一方、$0<b<1$ とすると

$$f(x)+f(-x)=f(b)+f(-b)$$

$$=f(b)+f(1-b)-3(-b)^2-3\times(-b)$$

$$=b^3+(1-b)^3-3b^2+3b=1$$

よって、 x が整数以外のとき１、整数のとき０