Benesse お茶の水ゼミナール

早稲田大学　政治経済学部　数学

総　論

満　点　70 点	**目標得点**　56 点	**試験時間**　60 分	**偏差値**　政治:75 国際政経/経済:74
大問数　4	**小問数**　12		
〔解答形式〕	**マーク式**　0/12 問	**短答式**　6/12 問	**記述式**　6/12 問
〔問題難易度〕	**C**　0/12 問	**B**　4/12 問	**A**　8/12 問
※問題難易度：C 難問、B 合否を分ける問題、A 正答すべき問題、を示す			

Topics

1：値を求めること自体はさほど難しくない求値問題が並ぶ。

2：記述力の差が合否を左右する。

3：難易度があまり高くない問題だけに計算ミスは致命傷になりかねない。

こんな力が求められる！

標準的な問題を間違いなく解ける力と、それを正しく記述する力が必要。

大 問 別 分 析

【問１】

予想配点　15 / 70 点	**時間配分の目安**　10 / 60 分
出題分野　漸化式（B）	
出題形式　計算	
小問別難易度　※問題難易度：C 難問、B 合否を分ける問題、A 正答すべき問題、を示す （１）A　（２）A　（３）A	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 各クラスとも３項間漸化式は扱う。そのときにしっかりマスターして欲しい。	

●解答のポイント＆学習対策等

ごく基本的な３項間漸化式。一般項が求まったら $n=1,2,3\cdots$ と代入し、答の確認をして間違いなく得点したい。

●解答＆解説

(1)　$3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0$　…①

$a_1=1,\ a_2=2$　…②

①に $n=1$ を代入

$3a_3-5a_2+2a_1=0$

②を代入

$3a_3-5\cdot 2+2\cdot 1=0$

$a_3=\dfrac{8}{3}$　…（答）

(2)　① $\Leftrightarrow 3(a_{n+2}-a_{n+1})-2(a_{n+1}-a_n)=0$

よって、$3b_{n+1}-2b_n=0$

$$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n \quad \cdots（答）$$

(3)　(2)より数列$\{b_n\}$は公比$\dfrac{2}{3}$の等比数列

$$b_n=b_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

②を代入

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって、$n\geqq 2$のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$=1+3-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$=4-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$n=1$でもこの式は成立するので

$$a_n=4-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots（答）$$

【問２】

予想配点　15 / 70 点	**時間配分の目安**　15 / 60 分
出題分野　空間ベクトル（Ｂ）	
出題形式　計算	
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す （１）Ａ　（２）Ａ　（３）Ｂ	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 ベクトルのなす角の求め方、２次関数の最大最小とも、どのクラスでも授業で扱う内容。	

●解答のポイント＆学習対策等

短答式なので表には現れないが、（３）ではxが取り得る値の範囲を考えなければならないことに注意。内積の成分計算、内積と角度の関係といった基本はしっかり押さえておくこと。

●解答＆解説＆研究

(1)　$\angle \mathrm{BOP} = 90^\circ$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,\ 2,\ \sqrt{2}),\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y,\ z)$ より

$$2y + \sqrt{2}z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\sqrt{2}y \quad \cdots ①$$　（答）

(2)　$\cos\angle \mathrm{OAP} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ より

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = (0,\ 0,\ -1),\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x,\ y,\ z-1)$ より

$$\frac{-(z-1)}{1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(z-1)^2}{x^2 + y^2 + (z-1)^2} = \frac{2}{3} \quad \text{かつ} \quad z \leqq 1$$

$$\Leftrightarrow 3(z-1)^2 = 2\left\{x^2 + y^2 + (z-1)^2\right\} \quad \text{かつ} \quad z \leqq 1$$

$$\Leftrightarrow (z-1)^2 - 2y^2 = 2x^2 \quad \text{かつ} \quad z \leqq 1$$

①を代入し、展開・整理し

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}y + 1 = 2x^2 \quad \text{かつ} \quad y \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \cdots ②$$　（答）

(3)　①，②より

$$z = -x^2 + \frac{1}{2}$$

x は任意の実数をとりうるので、

$x = 0$ のとき　z は最大値 $\dfrac{1}{2}$　…（答）

・以下のように図形的に考えることもできる

＜研究＞

i)　$\angle \mathrm{BOP} = 90^\circ$ より

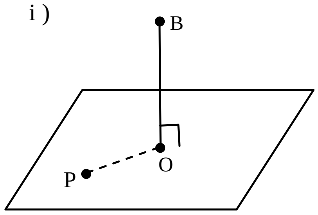
点 P は点 O を通り OB を法線とする平面 α の上の点

ii)　$\cos \angle \mathrm{OAP} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ より

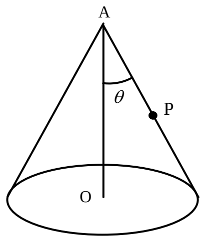
点 P は OA が軸、点 A が頂点で、軸と母線がなす角 θ の円錐 C 上の点

ただし、θ は $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$　かつ　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす角

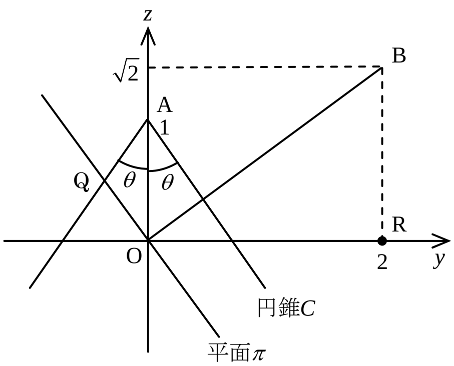
i)



ii)



yz 平面と垂直な方向から見ると



i, ii より平面 π 、円錐 C の交線上に点 P は存在し、その z 座標が最大となる点は、図中の点 Q である。

また、R(0, 2, 0) とすると、$\cos \angle \mathrm{BOR} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ であることから $\angle \mathrm{BOR} = \theta$、また $\mathrm{BO} \perp$ 平面 π なので

△OAQ は 2 等辺三角形となるので、

点 Q の z 座標は $\dfrac{1}{2}$

よって求める最大値は $\dfrac{1}{2}$

【問３】

予想配点　20 / 70 点	**時間配分の目安**　15 / 60 分
出題分野　積分（Ⅱ）、確率（Ａ）	
出題形式　計算、証明	
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す （１）Ａ　　（２）Ａ　　（３）Ｂ	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 整数問題は各分野との融合問題として、テキストでも繰り返し扱われる。整数問題の特質をその都度確認して欲しい。	

●解答のポイント＆学習対策等

（２）では感覚的には当然と思われることを証明させる問題。整数問題の記述は慣れていないと苦戦する。普段の学習から感覚頼りではなく、最後までしっかり記述する訓練が必要。

●解答

(1)　$S=\int_0^a (x^2-2bx+3c)\,dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-bx^2+3cx\right]_0^a$$

$$=\frac{a^3}{3}-ba^2+3ca \quad \cdots（答）$$

(2)　(1)より $S=0$ となるのは

$$\frac{a^3}{3}-ba^2+3ca=0 \quad \cdots ①$$

$$\Leftrightarrow a^3=3(ba^2-ca)$$

よって a^3 は 3 の倍数。

すべての整数は $3k,\ 3k+1,\ 3k-1$（k は整数）のいずれかの形で表せる。

$$(3k\pm1)^3=3(9k^3\pm9k^2+3k)\pm1$$

$$(3k^3)=27k^3$$

３乗して 3 の倍数となるのは $3k$ のみなので

$a=3k$ と表せる

$\therefore$ a は 3 の倍数　　　（証明終）

(3)　(2)より a は $0,\ 3,\ 6,\ 9$ のいずれか

ｉ）　$a=0$ のとき　$a>b>c$ を満たすカードの組はない。

ii)　$a=3$ のとき

①より　$9-9b+9c=0$

$\Leftrightarrow 1-b+c=0$

$a>b>c$ を満たす組は，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 1),\ (3,\ 1,\ 0)$

iii)　$a=6$ のとき

①より　$72-36b+18c=0$

$4-2b+c=0$

$a>b>c$ を満たす組は，$(a,\ b,\ c)=(6,\ 3,\ 2),\ (6,\ 2,\ 0)$

iv)　$a=9$ のとき

①より　$243-81b+27c=0$

$9-3b+c=0$

$a>b>c$ を満たす組は，$(a,\ b,\ c)=(9,\ 4,\ 3),\ (9,\ 3,\ 3)$

i～iv より　$S=0$ となるのは 6 通り

可能なカードの取り出し方は，${}_{10}\mathrm{C}_3=120$ 通り

求める確率は　$\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$　…（答）

【問４】

予想配点　20 / 70 点	**時間配分の目安**　20 / 60 分
出題分野　不等式（Ⅱ）	
出題形式　計算	
小問別難易度　※問題難易度：C 難問、B 合否を分ける問題、A 正答すべき問題、を示す （１）Ｂ　（２）Ａ　（３）Ｂ	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 センター対策のクラスを除くとお茶ゼミの数学の授業は基本的に記述式に適応できる力を養える形式になっている。答えを求めるだけではなく、どう記述するのかを授業で習得して欲しい。	

●解答のポイント＆学習対策等

対称式、解と係数の関係、相加相乗平均の大小関係。この３者は非常に親和性がよい。そのことを念頭に置いておけば（１）は見えてくるはず。

（３）では同値性に注意。同値性も普段の学習から意識しておくこと。急に使えるようにはならない。

●解答

(1)　$\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}+2$　…①

ここで、$\dfrac{\beta}{\alpha}>0,\ \dfrac{\alpha}{\beta}>0$ なので

相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\geqq 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+2\geqq 4 \quad \cdots②$$

①、②より

$$\frac{x^2}{y} \geqq 4$$

等号成立は $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ のとき

$\alpha,\ \beta$ は正なので、$\alpha = \beta$ のとき

よって、$\alpha = \beta$ のとき　$\dfrac{x^2}{y}$ は最小値 4 をとる

(2)　$x^2 - 2y = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$= \alpha^2 + \beta^2$$

$x^3 - 3xy = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$$= \alpha^3 + \beta^3$$

よって

$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^3 + \beta^3$ より

$$x^2 - 2y = x^3 - 3xy$$

$$\Leftrightarrow (3x - 2)y = x^3 - x^2$$

$x = \dfrac{2}{3}$ のとき　この式は成立しないので

$x \neq \dfrac{2}{3}$ なので

$y = \dfrac{x^3 - x^2}{3x - 2}$　…（答）

(3)　等式（A）

$\Leftrightarrow y = \dfrac{x^3 - x^2}{3x - 2}$　かつ　$x = \alpha + \beta,\ y = \alpha\beta$　かつ　$\alpha > 0,\ \beta > 0$　…＊

(1)より任意の正の $\alpha,\ \beta$ に対して $\dfrac{x^2}{y} \geqq 4$

また、$\dfrac{x^2}{y} = \dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}$ は β の値を固定し、α の値を動かすことで、$\dfrac{x^2}{y} \geqq 4$ の範囲で $\dfrac{x^2}{y}$ は任意の値を

とることができるので $\dfrac{x^2}{y} \geqq 4$ を満たす任意の $x,\ y$ に対し、正の実数 $\alpha,\ \beta$ は存在する。

また、$\alpha > 0,\ \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta > 0$ かつ $\alpha,\ \beta$ が実数。
よって

$$* \Leftrightarrow y = \frac{x^3 - x^2}{3x - 2} \quad \cdots① \text{ かつ } \frac{x^2}{y} \geqq 4 \quad \cdots② \text{ かつ } x > 0,\ y > 0 \quad \cdots③$$

③より $x \neq 0$ なので、①の辺々 x^2 で割り

$$\frac{y}{x^2} = \frac{x - 1}{3x - 2}$$

$y \neq 0$ なので

$$\frac{x^2}{y} = \frac{3x - 2}{x - 1}$$

②と合わせ

$$\frac{3x - 2}{x - 1} \geqq 4$$

辺々 $(x-1)^2$ をかけると、

$$(3x - 2)(x - 1) \geqq 4(x - 1)^2 \qquad (x \neq 1)$$
$$(x - 1)(x - 2) \leqq 0 \qquad (x \neq 1)$$

$1 < x \leqq 2$ … (答)