Benesse® お茶の水ゼミナール

早稲田大学 基幹, 創造, 先進理工学部 数学

総　論

満　点　120 点	**目標得点**　78 点	**試験時間**　120 分	
偏差値　基幹:64　創造 - 総合機械工:64　環境資源工:63　建築:65　社会環境工:62　経営システム工:62 先進 - 物理:67　化学･生命化:65　電気･情報生命工:65　応用化:65　応用物理:65　生命医科:67			
大問数　5	**小問数**　17		
〔解答形式〕	**マーク式**　0/17 問	**短答式**　0/17 問	**記述式**　17/17 問
〔問題難易度〕	**C**　1/17 問	**B**　8/17 問	**A**　8/17 問
※問題難易度：C 難問、B 合否を分ける問題、A 正答すべき問題、を示す			

Topics

1：昨年度より易化。各問とも誘導にうまく乗って注意深く計算すれば高得点が取れるセットである。

2：毎年のように出題される数列の問題は無かったが、整数問題、確立は昨年同様に出題された。

3：標準的な問題が多く、微分での計算ミスが大きく合否に影響したであろう。

こんな力が求められる！

数学Ⅲからの出題が中心であり、論理的な思考力に加え、微積での複雑な計算に対して迅速かつ正確に処理する力が必要。センターⅠＡⅡＢでともに９割以上が取れるレベルまで実力を上げたい。

大 問 別 分 析

【Ⅰ】

予想配点　20 / 120 点	**時間配分の目安**　20 / 120 点	**目標得点**　13 / 20 点
出題分野　数学Ａ（整数）		
出題形式　計算、証明		
小問別難易度　※問題難易度：C 難問、B 合否を分ける問題、A 正答すべき問題、を示す （1）Ａ　（2）Ｂ　（3）Ｂ		

●**解答**

(1) $\dfrac{14}{3} < x < 5$ のとき

$$2 < \frac{3}{7}x < \frac{15}{7}$$

より

$$\left[\frac{3}{7}x\right] = 2$$

また

$[x] = 4$ だから

$$\left[\frac{3}{7}[x]\right]=\left[\frac{3}{7}\cdot 4\right]=1$$

$$\therefore \left[\frac{3}{7}x\right]-\left[\frac{3}{7}[x]\right]=2-1=1 \quad \cdots（答）$$

(2) $\left[\frac{1}{2}x\right]=m$ （m ：整数）のとき、

$$m \leqq \frac{1}{2}x < m+1$$

$$2m \leqq x < 2m+2$$

$$\therefore [x]=2m \text{ または } 2m+1$$

また、

$$\frac{1}{2}[x]=m \text{ または } m+\frac{1}{2}$$

であるが、いずれにせよ

$$\left[\frac{1}{2}[x]\right]=m$$

$$\therefore \left[\frac{1}{2}x\right]-\left[\frac{1}{2}[x]\right]=m-m=0 \quad （証明終）$$

(3) $\left[\frac{1}{n}x\right]=m$ （n ：整数）のとき

$$m \leqq \frac{1}{n}x < m+1$$

$$mn \leqq x < mn+n$$

$$\therefore [x]=mn+k \quad （k=0,1,\cdots,n-1）$$

また、

$$\frac{1}{n}[x]=m+\frac{k}{n} \quad （k=0,1,\cdots,n-1）$$

であるが、いずれにせよ

$$\left[\frac{1}{n}[x]\right]=m$$

$$\left[\frac{1}{n}x\right]-\left[\frac{1}{n}[x]\right]=m-m=0 \quad \cdots（答）$$

●ポイント

ガウス記号の問題である。

(1)は問題無い。

(2)は、$[x]=p$（p：整数）とかけるとき、$p \leqq x < p+1$ であることを用いると、簡潔に答案がかける。

解答では、$\left[\dfrac{1}{2}x\right]$ の方を m とおいたが、$[x]$ を m とおくと、少し手間がかかる。

また、すべての実数は、$x=2m+r$（m：整数，$0 \leqq r < 2$）と表すことができ、これらを代入することでも示すことができる。

(3)は、(2)を参考にすれば容易に解答することができるであろう。

●学習対策

ガウス記号に触れる機会が少なかった現役生は(2) 、(3)は少々難しかったと思われる。問題を数多く解く必要はないが、典型的な問題を通じて，コツを掴んでおきたい。

【Ⅱ】

予想配点　20 ／ 120 点	**時間配分の目安**　20 ／ 120 点	**目標得点**　20 ／ 20 点
出題分野　数学Ｃ（一次変換）、数学Ⅱ（図形と方程式、微分）		
出題形式　計算		
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す （１）Ａ　（２）Ａ　（３）Ａ　（４）Ａ		

●解答

(1)　l_1 の上の点 $(t,\ 1)$（t は実数）は、行列 A により点 $(x,\ y)$ に移るとすると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} at+1 \\ -t+a \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = at+1 \\ y = -t+a \end{cases}$$

t を消去して整理すると

$$l_2 : y = -\frac{1}{a}x + a + \frac{1}{a}$$

また、

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

より、同様に、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} at-1 \\ t+a \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{at-1}{a^2+1} \\ y = \dfrac{t+a}{a^2+1} \end{cases}$$

t を消去して整理すると、

$$l_3 : y = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a} \quad \cdots（答）$$

(2)　$l_1 : y = 1,\ l_2 : y = -\dfrac{1}{a}x + a + \dfrac{1}{a}$

より　$\mathrm{P}(a^2 - a + 1,\ 1)$　$\cdots$（答）

$l_1 : y = 1,\ l_3 : y = \dfrac{1}{a}x + \dfrac{1}{a}$

より　$\mathrm{Q}(a-1,\ 1)$　$\cdots$（答）

$l_2 : y = -\dfrac{1}{a}x + a + \dfrac{1}{a},\ l_3 : y = \dfrac{1}{a}x + \dfrac{1}{a}$

より　$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2}a^2,\ \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{a}\right)$　$\cdots$（答）

(3)　(2)より

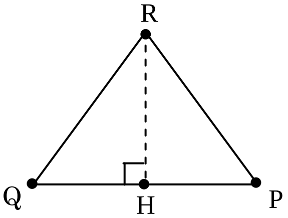
$$\mathrm{PQ} = \left|(a^2 - a + 1) - (a-1)\right|$$

$$= \left|a^2 - 2a + 2\right|$$

$$= a^2 - 2a + 2 \quad (\because\ a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 > 0)$$

であり、点 R から l_1 に垂線 RH をおろすと

$$\mathrm{RH} = \left|\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{a}\right) - 1\right|$$



$$= \left|\frac{a^2 - 2a + 2}{2a}\right|$$

$$= \frac{a^2 - 2a + 2}{2a} \quad (\because\ a > 0,\ a^2 - 2a + 2 > 0)$$

よって

$$S(a)=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{RH}$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-2a+2)\cdot\frac{a^2-2a+2}{2a}$$

$$=\frac{(a^2-2a+2)^2}{4a}\quad\cdots\text{（答）}$$

(4)　$S'(a)=\dfrac{1}{4a^2}\left\{2a(a^2-2a+2)\cdot(2a-2)-(a^2-2a+2)^2\right\}$

$$=\frac{1}{4a^2}(a^2-2a+2)(3a^2-2a-2)$$

$$=\frac{1}{4a^2}(a^2-2a+2)\left(a-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(a-\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$$

$$a^2>0,\ a^2-2a+2>0,\ \frac{1-\sqrt{7}}{3}<0$$

より

a	0	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	0	$+$
$S(a)$		□	最小	□

$\therefore$ $S(a)$ を最小にする a は、$\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$　$\cdots$（答）

●ポイント

(1)は、一次変換による直線の像を求める問題。計算ミスしないように心がけること。

(2)は、連立方程式を解くだけである。

(3)(4)は、典型的な問題であるが，(4)で増減表などを書くなどして，$a=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$ のときに最小であることをしっかり示すこと。

●学習対策

一次変換による図形の像の問題をしっかり演習しておくこと。

【Ⅲ】

予想配点　20 ／ 120 点	**時間配分の目安**　20 ／ 120 点	**目標得点**　17 ／ 20 点
出題分野　数学Ａ（確率）		
出題形式　計算		
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す （１）Ａ　（２）Ａ　（３）Ａ　（４）Ｂ		

♡　1〜10

♤　1〜10

計 20 枚　→　4 枚

たとえば

♡ 1 － ♤ 1 が含まれる ⇒ A_1

●**解答**

(1)　事象 A_1 が起こるとき、♡ 1 と♤ 1 は必ず入り、残りの 18 枚から 2 枚を取り出すときである。

$$P(A_1)=\frac{{}_{18}\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_4}$$

$$=\frac{\dfrac{18\cdot17}{2\cdot1}}{\dfrac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}$$

$$=\frac{9\cdot17}{5\cdot19\cdot3\cdot17}$$

$$=\frac{3}{95}\quad\cdots（答）$$

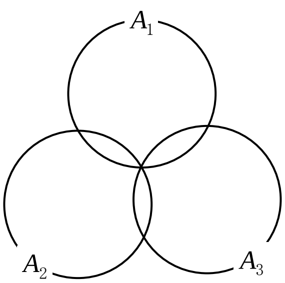
(2)　事象 $A_1\cap A_2$ が起こるとき、♡ 1, 2，♤ 1, 2 を取り出すときである。

$$P(A_1\cap A_2)=\frac{1}{{}_{20}\mathrm{C}_4}$$

$$=\frac{1}{5\cdot19\cdot3\cdot17}$$

$$=\frac{1}{4845}\quad\cdots（答）$$

(3)　事象 $A_1\cap A_2\cap A_3$ が同時に起こることはなく、



(1)，(2)より $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{3}{95}$

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_2\cap A_3)=P(A_3\cap A_1)=\frac{1}{4845}$$

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_2\cap A_3)-P(A_3\cap A_1)$$

$$=\frac{3}{95}\times 3-\frac{1}{4845}\times 3$$
$$=\frac{9}{5\cdot 19}-\frac{3}{5\cdot 19\cdot 3\cdot 17}$$
$$=\frac{9\cdot 17-1}{5\cdot 19\cdot 17}$$
$$=\frac{152}{5\cdot 19\cdot 17}$$
$$=\frac{8}{85}\quad\cdots\text{（答）}$$

(4)　事象 A_1〜A_6 は 3 つ以上は同時に起こることはない。

1 つの事象が起こる確率は、どれも $\frac{3}{95}$ であり，どれか 2 つの事象が同時に起こる確率は $\frac{1}{4845}$ で、2 つの事象の選び方は、${}_6\mathrm{C}_2=15$ 通りある。

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6)$$
$$=\frac{3}{95}\times 6-\frac{1}{4845}\times 15$$
$$=\frac{3\cdot 6}{5\cdot 19}-\frac{15}{5\cdot 19\cdot 3\cdot 17}$$
$$=\frac{3\cdot 6\cdot 17-5}{5\cdot 19\cdot 17}$$
$$=\frac{301}{1615}\quad\cdots\text{（答）}$$

●ポイント

問題文に「i」が含まれ、一見難しそうに見えるが、文章をしっかり読めば、題意を把握できる。
場合の数や確率の問題は、設定が複雑な場合でも、文章を落ちついて読み、実験をすれば、どのように解答すればよいかわかってくる。

(1)(2)は問題無い。

(3)(4)は、(1)(2)を利用するが、ダブリがあることに気をつける。その際にベン図をかくと見通しがつく。
分母が大きな値になるので、効率よく計算をし、ミスをしないように心がけること。

●学習対策

場合の数・確率の基本的な問題を通じて、もれなく数えること、排反に場合わけすること、全体からダブリを除くことに慣れておくこと。答案を書く際，ただ式を書き続けるのでなく、きちんと文章を残す練習をしておきたい。

【Ⅳ】

予想配点　30 ／ 120 点	**時間配分の目安**　30 ／ 120 点	**目標得点**　16 ／ 30 点
出題分野　数学Ａ（図形）、数学Ⅱ（微分）		
出題形式　計算		
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す （１）Ｂ　　（２）Ｂ　　（３）Ｂ		
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 ＯＳ理系数学（２学期）に類似問題あり。		

●解答

(1)

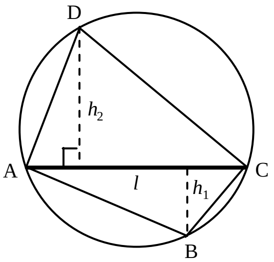


図１

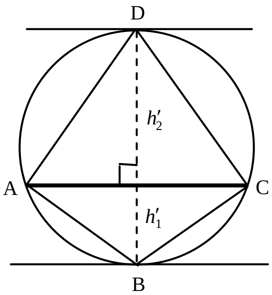


図２

図１のように $AC = l$ と固定して、２点 B, D を動かす。

AC を底辺と考えたとき、△ABC, △ADC の高さ h_1, h_2 が最大になるとき、四角形 ABCD の面積は最大となる。h_1, h_2 が最大になるのは、２点 B, D における接線が AC と平行になるとき、つまり図２となるときである。このとき、BD は AC の垂直２等分線であり，円の直径 $(2r)$ となる。

よって求める面積の最大値は、

$$\frac{1}{2}\times AC\times BD = \frac{1}{2}\times l\times 2r = rl \quad \cdots（答）$$

(2)　(1)の結果の l を $0 < l \leqq 2r$ の範囲で動かすと、$l = 2r$ つまり，円の直径となるとき最大となる。

よって

$$r\times(2r) = 2r^2 \quad \cdots（答）$$

(3)　O から四角形 ABCD を含む平面に下ろした垂線の足を H とする。$OA = OB = OC = OD = 1$ より、点 H が四角形 ABCD の外接円の中心となる。（図１）

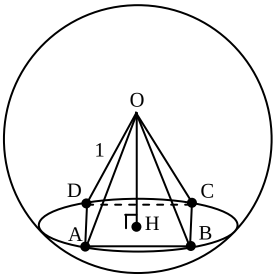
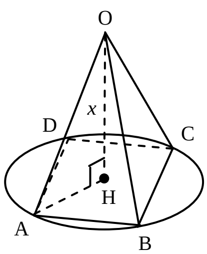


図１



四角錘の体積が最大となるのは、四角形 ABCD の面積が最大になる場合である。(2)より四角形 ABCD は正方形となる。

図２で $\mathrm{OH}=x\ \ (0<x<1)$ 、四角形の体積を $V(x)$ とすると、

$$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\mathrm{AB}=\sqrt{2(1-x^2)}$$

よって、$V(x)=\dfrac{1}{3}\times$（四角形 ABCD の面積）$\times\mathrm{OH}$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\sqrt{2(1-x^2)}\right\}^2\times x$$

$$=\frac{2}{3}(x-x^3)$$

$$V'(x)=\frac{2}{3}(1-3x^2)$$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		□	最大	□	

ゆえに最大値は

$$V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{27}$$

●ポイント

(1)は、片方を固定して他を動かす作業に慣れていないと、最大となる場合は予想がついても論証が不十分になってしまう可能性がある。不等式を導入して解答してもよい。たとえば、

$$\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}l\cdot h_1+\frac{1}{2}l\cdot h_2=\frac{1}{2}l(h_1+h_2)$$

$$\leqq\frac{1}{2}l\times 2r$$

$$=lr$$

（等号は，$h_1+h_2=2r$　つまり BD が円の直径となるとき）

(2)は、(1)の結果を利用する。

(3)は、四角形 ABCD は、平面 ABCD と点 O を中心とする半径 1 の球の交円上にあることを述べておきたい。$\mathrm{OH}=x$ とおいて、数 II の範囲の微分を行えばよい。

●学習対策

多変数関数の最大最小問題を解き、片方を固定して他を動かすことをしっかり身に付けること。空間図形の問題も積極的に解いておくこと。

【V】

予想配点　30 / 120 点	時間配分の目安　30 / 120 点	目標得点　12 / 30 点
出題分野　数学Ⅲ（微分、積分、極限）		
出題形式　計算		
小問別難易度　※問題難易度：C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す （1）B　（2）B　（3）C		

●解答

(1)　$f(x)=e^{(p+1)x}-e^{x}$

$$f'(x)=(p+1)e^{(p+1)x}-e^{x}$$

$$=(p+1)e^{x}\left(e^{px}-\frac{1}{p+1}\right)$$

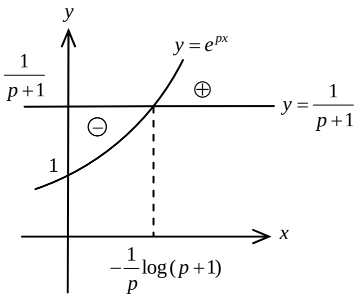
$f'(x)=0$ のとき　$e^{px}=\dfrac{1}{p+1}$

$$px=\log\frac{1}{p+1}$$

$$\therefore\ x=-\frac{1}{p}\log(p+1)$$

$(p+1)e^{x}>0$ より

$e^{px}-\dfrac{1}{p+1}$ の符号変化を調べればよい。



x	$-\infty$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{p}\log(p+1)$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	□	最小	□	∞

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left\{e^{(p+1)x}-e^{x}\right\}=0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{e^{(p+1)x} - e^{x}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left\{e^{x}(e^{px}-1)\right\} = \infty$$

よって　$S_p = -\dfrac{1}{p}\log(p+1)$　･･･（答）

ここで　$x = S_p$ のとき

$$e^{pS_p} = \frac{1}{p+1}$$

より

$$e^{S_p} = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

となるから

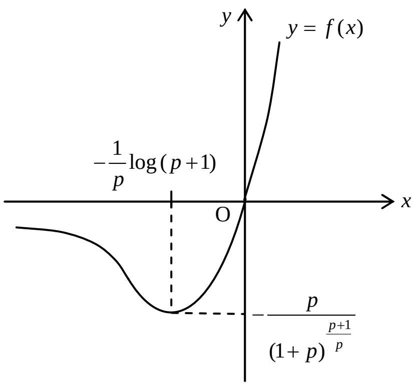
$$f(S_p) = e^{(p+1)S_p} - e^{S_p}$$

$$= e^{Sp}(e^{pSp}-1)$$

$$= \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p+1}-1\right)$$

$$= -\frac{p}{(p+1)^{\frac{p+1}{p}}}$$

よってグラフは右図



(2)　$g(t) = \displaystyle\int_t^{t+1} f(x)e^{t-x}dx$

$$= e^{t}\int_t^{t+1}(e^{px}-1)\,dx$$

$$= e^{t}\left[\frac{1}{p}e^{px} - x\right]_t^{t+1}$$

$$= e^{t}\left\{\frac{1}{p}(e^{p(t+1)} - e^{pt}) - (t+1-t)\right\}$$

$$= e^t\left\{\frac{e^{pt}}{p}(e^p-1)-1\right\}$$

$$= \frac{e^p-1}{p}e^{(p+1)t} - e^t$$

$$g'(t) = \frac{e^p-1}{p}\cdot(p+1)e^{(p+1)t} - e^t$$

$$= e^t\left\{\frac{(e^p-1)(p+1)}{p}e^{pt}-1\right\}$$

$g'(t)=0$ のとき

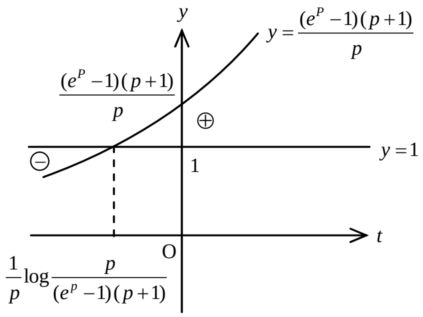
$$e^{pt} = \frac{p}{(e^p-1)(p+1)}$$

$$pt = \log\frac{p}{(e^p-1)(p+1)}$$

$$\therefore\ t = \frac{1}{p}\log\frac{p}{(e^p-1)(p+1)}$$

$e^t>0$ より $\dfrac{(e^p-1)(p+1)}{p}e^{pt}-1$ の符号変化を調べればよい。

$p>0$ より $\dfrac{(e^p-1)(p+1)}{p}>0$



t	$\cdots$	$\frac{1}{p}\log\frac{p}{(e^p-1)(p+1)}$	
$g'(t)$		0	
$g(t)$	□	最小	□

ゆえに $t_p=\dfrac{1}{p}\log\dfrac{p}{(e^p-1)(p+1)}$ ・・・（答）

(3)　(1)(2)より

$$t_p-s_p=\frac{1}{p}\log\frac{p}{(e^p-1)(p+1)}+\frac{1}{p}\log(p+1)$$

$$=\frac{1}{p}\log\frac{p}{(e^p-1)(p+1)}\times(p+1)$$

$$=\frac{1}{p}\log\frac{p}{e^p-1}$$

$$=-\frac{1}{p}\log\frac{e^p-1}{p}$$

ここで、$0<p\leqq1$ のとき

$$1+\frac{p}{2}\leqq\frac{e^p-1}{p}\leqq1+\frac{p}{2}+p^2$$

$$\log\left(1+\frac{p}{2}\right)\leqq\log\frac{e^p-1}{p}\leqq\log\left(1+\frac{p}{2}+p^2\right)$$

$$-\frac{1}{p}\log\left(1+\frac{p}{2}+p^2\right)\leqq-\frac{1}{p}\log\frac{e^p-1}{p}\leqq-\frac{1}{p}\log\left(1+\frac{p}{2}\right)$$

ここで、$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ であるから

$$\lim_{p\to+0}\left\{-\frac{1}{p}\log\left(1+\frac{p}{2}+p^2\right)\right\}=\lim_{p\to+0}\frac{\log\left(1+\frac{p}{2}+p^2\right)}{\frac{p}{2}+p^2}\times\left\{-\left(\frac{1}{2}+p\right)\right\}$$

$$=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{p\to+0}\left\{-\frac{1}{p}\log\left(1+\frac{p}{2}\right)\right\}=\lim_{p\to+0}\frac{\log\left(1+\frac{p}{2}\right)}{\frac{p}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

ゆえに、はさみうちの原理より

$$\lim_{p \to +0} (t_p - s_p) = -\frac{1}{2} \quad \cdots \text{（答）}$$

●ポイント

(1)はグラフを描く際に $\lim_{x \to -\infty} f(x),\ \lim_{x \to \infty} f(x)$ が必要になってくる。

(2)は $g(t)$ をそのまま微分すると

$$g(t) = e^t \int_t^{t+1} e^{-x} f(x)\,dx$$

$$g'(t) = e^t \int_t^{t+1} e^{-x} f(x)\,dx + e^t \left\{ e^{-(t+1)} f(t+1) - e^{-t} f(t) \right\}$$

となり、うまくいかない。

(1)(2)とも、 $f'(x),\ g'(t)$ の符号変化をしっかり求めたが、題意から、 s_p, t_p で最小であるので、増減表は符号変化を求めなくても書ける。

(3)は、はさみうちの原理を使うが，式変形の際の不等号の向きに注意すること。

(1) 、(2) 、(3)とも計算量が多いので計算ミスには気を付ける。

●学習対策

早稲田理工は、複雑な微分、積分の計算が出題されるので、普段問題を解く際に効率よく計算することを心がけること。