Benesse お茶の水ゼミナール

東京大学　理科-前期　数学

総　論

満　点　120 点	**目標得点**　80 点	**試験時間**　150 分	**偏差値** 理Ⅰ·理Ⅱ:72 理Ⅲ:77
大問数　6	**小問数**　16		
〔解答形式〕	**マーク式**　0/16 問	**短答式**　0/16 問	**記述式**　16/16 問
〔問題難易度〕	**C**　2/16 問	**B**　7/16 問	**A**　7/16 問
※問題難易度：C 難問、B 合否を分ける問題、A 正答すべき問題、を示す			

Topics

1：各大問とも前半は比較的易しい。ここは確実に得点したい。

2：一見難しく見える問題も、部分部分を切り離して考えると標準的な知識におさまる問題が大半。

3：受験生なら誰でも持っている知識をいかに組み合わせるかがポイント。

こんな力が求められる！

大問４、５、６のような評価の問題は、数式に表された内容や、平面上に画かれた空間図形を具体的にイメージする力が必要。

また普段から初見の良問にじっくりと時間をかけて取り組み、持てる知識を組み合わせていく力を養っておきたい。

大 問 別 分 析

【第１問】

予想配点　20 / 120 点	**時間配分の目安**　30 / 150 分
出題分野　図形と方程式２項定理（A）、数学的帰納法（B）、整数（I）	
出題形式　証明	
小問別難易度　※問題難易度：C 難問、B 合否を分ける問題、A 正答すべき問題、を示す （1）A　（2）B　（3）C	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 フェルマーの小定理の証明はＯＳ数学のテキスト、Weekly テストでも扱われた。	

●解答のポイント＆学習対策等

フェルマーの小定理を数学的帰納法で証明したことがあれば（2）は容易に示せるはず。教科書にないことでも積極に学ぶ姿勢の有無が出来をわける問題。

●解答

(1)　$1 \leqq k \leqq m-1$ である整数 k に対して

$$ {}_m\mathrm{C}_k = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m}{k}\,\frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} = \frac{m}{k}\,{}_{m-1}\mathrm{C}_{k-1} $$

よって　$k\,{}_m\mathrm{C}_k = m\,{}_{m-1}\mathrm{C}_{k-1}$

${}_m\mathrm{C}_k$，${}_{m-1}\mathrm{C}_{k-1}$ はともに整数なので、右辺は m の倍数、よって左辺も m の倍数

$k \leqq m-1$ より k と素数 m は互いに素なので、${}_m\mathrm{C}_k$ は m の倍数

よって m は ${}_m\mathrm{C}_k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m-1)$ の公約数である。

また、${}_m\mathrm{C}_1 = m$ なので，m は ${}_m\mathrm{C}_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$ の最大公約数である．（証明終）

(2)　$k^m - k$ が $d_m = m$ で割り切れる　…Ⓐ

Ⓐを数学的帰納法で示す。

i)　$k=1$ のとき

$1^m - 1 = 0$ は m で割り切れるので、Ⓐは真

ｉｉ)　$k=n$ のときⒶが真であると仮定する。

このとき $n^m - n = mp$ （ p は整数）　…①

と表せる。

ここで、2 項定理より

$$(n+1)^m = \sum_{i=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_i n^i$$

$$= n^m + \sum_{i=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_i n^i + 1$$

(1)より $1 \leqq i \leqq m-1$ に対し ${}_m\mathrm{C}_i$ は m の倍数なので

${}_m\mathrm{C}_i = ma_i$ （ a_i は整数）と表せるので

$$(n+1)^m = n^m + 1 + \sum_{i=1}^{m-1} ma_i$$

$$(n+1)^m - (n+1) = n^m + 1 + \sum_{i=1}^{m-1} ma_i - (n+1)$$

$$= n^m - n + m\sum_{i=1}^{m-1} a_i$$

$$= mp + m\sum_{i=1}^{m-1} a_i \quad (\because\ ①)$$

$$= m\left(p + \sum_{i=1}^{m-1} a_i\right)$$

$p + \sum_{i=1}^{m-1} a_i$ は整数なので、

$(n+1)^m - (n+1)$ は m で割り切れるので

$k = n+1$ のときもⒶは真

i)，ii)よりⒶは任意の自然数 k で真　　（証明終）

(3)　(2)より $d_m = m$ は $k^m - k \ \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の公約数である。

ここで、2 項定理より

$$(k-1)^m = \sum_{i=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_i k^i (-1)^{m-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_i k^i (-1)^{m-i} + (-1)^m$$

$$= k\sum_{i=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_i k^{i-1} (-1)^{m-1} + 1 \quad （\because\ m \text{ は偶数より } (-1)^m = 1）$$

よって

$$(k-1)^m - (k-1) = k\sum_{i=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_i k^{i-1} (-1)^{m-i} + 1 - (k-1)$$

$$= k\left\{1 + \sum_{i=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_i k^{i-1} (-1)^{m-i}\right\} + 2$$

$1 + \sum_{i=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_i k^{i-1} (-1)^{m-i}$ は整数なので $k \geqq 3$ のとき

$(k-1)^m - (k-1)$ を k で割った余りは 2

よって、3 以上の整数は $k^m - k \ \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の公約数ではない。

$\therefore\ d_m = m$ は 1 または 2 である　　　（証明終）

【第２問】

予想配点　20 ／ 120 点	**時間配分の目安**　20 ／ 150 分
出題分野　行列（C）、極限（Ⅲ）	
出題形式　計算、証明	
小問別難易度　※問題難易度：C 難問、B 合否を分ける問題、A 正答すべき問題、を示す （１）A　　（２）A　　（３）B	

●解答のポイント＆学習対策等

スマートに解こうとすると（３）で手が止まる。解法が浮かばないときは、泥臭く計算をする力強さが必要。

●解答

(1)　$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sr \\ s \end{pmatrix}$$ （∵ (ii)）

よって $A\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-rc & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$$ … (答)

(2) $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C$ とする。

(1)より $B = C^{-1}AC$

$$B^n = C^{-1}AC \cdot C^{-1}AC \cdot C^{-1}AC \cdots C^{-1}AC$$

$$= C^{-1}A^nC$$

よって $B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1}A^nC\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A^n\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_n - ry_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$z_n = x_m - ry_n$, $w_n = y_n$ より

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(x_n - ry_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - r\lim_{n\to\infty} y_n = 0$$ （∵ (iii)）

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$ （証明終）

(3)　(1)より $B=\begin{pmatrix} a-rc & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$

$a-rc=t$ とすると

$$B^n=\begin{pmatrix} t^n & 0 \\ p_n & s^n \end{pmatrix}$$ …①と表せることを示す。

ただし　$p_n=\mathrm{C}(t^{n-1}+t^{n-2}s+t^{n-3}s^2+\cdots+ts^{n-2}+s^{n-1})$ とする

∵　i)　$n=1$ のとき①は成立。

ii)　$n=k$ のとき①が成立すると仮定すると

$$B^{k+1}=BB^k$$

$$=\begin{pmatrix} t & 0 \\ c & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^k & 0 \\ p_k & s^k \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} t^{k+1} & 0 \\ ct^k+sp_k & s^{k+1} \end{pmatrix}$$

ここで　ct^k+sp_k

$$=ct^k+sc(t^{k-1}+t^{k-2}s+\cdots+ts^{k-2}+s^{k-1})$$

$$=c(t^k+t^{k-1}s+t^{k-2}s^2+\cdots+ts^{k-1}+s^k)$$

$$=p_{k+1}$$

よって $B^{k+1}=\begin{pmatrix} t^{k+1} & 0 \\ p_{k+1} & s^{k+1} \end{pmatrix}$

$n=k+1$ のときも①は成立。

i)，ii)より数学的帰納法からすべての自然数 n で①は成立する。

$$B_n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^n & 0 \\ p_n & s_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} t^n \\ p_n \end{pmatrix}$$

(2)より $\lim_{n\to\infty} t^n=0$　…②

$\lim_{n\to\infty} p_n=0$　…③

②より $|t|<1$　…③

$s>1$ より　$t \neq s$ なので

$$p_n = c \cdot \frac{s^n - t^n}{s - t}$$

$\lim_{n\to\infty} s^n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} t^n = 0,\ \lim_{n\to\infty} p_n = 0$ より

$$c = 0$$

また　$t = a - rc = a$ なので

③より $|a| < 1$　　（証明終）

【第３問】

予想配点　20 ／ 120 点	時間配分の目安　20 ／ 150 分
出題分野　確率（Ａ）	
出題形式　計算	
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す （１）Ａ　（２）Ａ　（３）Ａ	

●解答のポイント＆学習対策等

易問なだけに計算ミスに気を付けたい。

●解答

(1)　操作Ａを５回おこない、L に４色すべてが入るのはいずれかの１色が２回、他の色が１回ずつ出るときなので確率は

$$ {}_4C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot 3! \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{15}{64} \quad \cdots ①$$

R についても同様なので、

$$p_1 = \left(\frac{15}{64}\right)^2 = \frac{225}{4096} \quad \cdots（答）$$

(2)　①と同様　$\dfrac{15}{64}$　…（答）

(3)　題意の状態になるのは各色が少なくとも２回出るとき、つまり

i)　いずれかの１色が４回、他の色が２回ずつ

または

ii)　いずれかの２色が３回ずつ、他の色が２回ずつ出るとき

i)　$ {}_4C_1 \cdot {}_{10}C_4 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{10!}{48}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$

ii)　$ {}_4C_2 \cdot {}_{10}C_3 \cdot {}_7C_3 \cdot {}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{10!}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$

よって、 $p_3=\dfrac{10!}{48}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}+\dfrac{10!}{24}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}=\dfrac{10!}{16}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}$

また、 $p_1=225\left(\dfrac{1}{4}\right)^{6}$ より

$$\frac{p_3}{p_1}=\frac{\dfrac{10!}{16}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}}{225\left(\dfrac{1}{4}\right)^{6}}=\frac{10!}{16\cdot 225}\left(\frac{1}{4}\right)^{4}$$

$$=\frac{63}{16}\quad\cdots\text{（答）}$$

【第４問】

予想配点　20 ／ 120 点	**時間配分の目安**　25 ／ 150 分
出題分野　体積（Ⅲ）、極限（Ⅲ）	
出題形式　計算	
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す （１）Ａ　　（２）Ｂ	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 体積の評価はこのような問題に限らず、体積の求値問題でも、計算の確認のための概算値を求める手法として、授業で繰り返し扱っている。	

●解答のポイント＆学習対策等

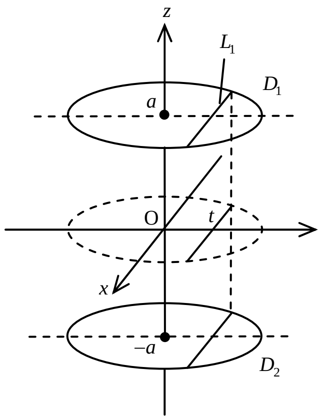
カバリエリの原理 ［同じ高さにおける断面積がつねに等しい２つの立体は体積が等しい。］ を知っていれば（１）は積分なしでも半球の体積として求まる。

図形を断面図ではなく立体のままでも把握してほしい。球は大きくなると局所的には平面に近づくことがわかっていれば（２）は感覚的に理解できる。

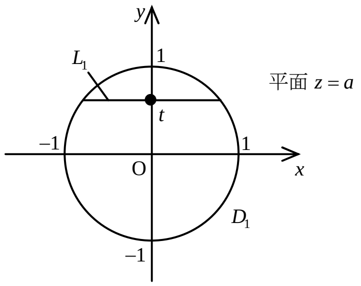
「求めにくい極限ははさむ」と思えるかも１つのポイントだが、何を用いはさむかは、その感覚的な部分が必要。

●解答

(1)



円板 D_1 と平面 $y=t$ との交わりである線分を L_1 とする。

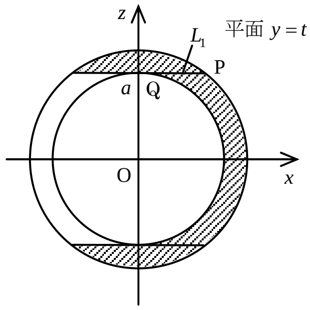


L_1 の両端の座標は $(\pm\sqrt{1-t^2},\ t,\ a)$

よって E と平面 $y=t$ の共通部分を E_t，

点 $(\sqrt{1-t^2},\ t,\ a)$ を点 P

点 $(0,\ t,\ a)$ を点 Q とする



$$\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{OQ}^2+\mathrm{QP}^2}$$

$$=\sqrt{a^2+1-t^2}$$ より

E_t（斜線部分）と $\{(x,\ y,\ z)\,|\,x\geqq 0\}$ との共通部分の面積を S_t とすると

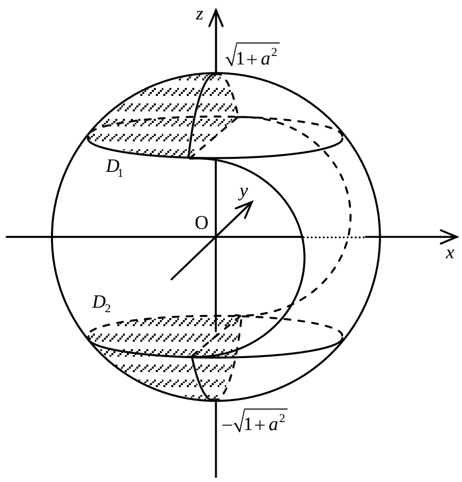
$$S_t=\frac{1}{2}(\mathrm{OP}^2\cdot\pi-\mathrm{OQ}^2\pi)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(a^2+1-t^2)\pi-a^2\pi\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(1-t^2)\pi$$

よって $W(a)=\int_{-1}^{1}S(t)\,dt=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-t^2)\pi dt=\frac{2\pi}{3}$ …（答）

(2)

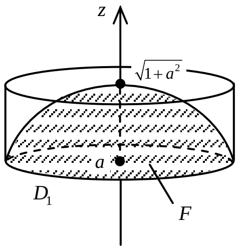


E と $\{(x,\ y,\ z)\,|\,x\leqq 0\}$ の共通部分（斜線部）の体積を $U(a)$ とする。

$F=\left\{(x,\ y,\ z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\leqq 1+a^2 \text{ かつ } z\geqq a\right\}$

とすると

F の体積は $U(a)$ に等しい。



F は底面 D_1，高さ $\sqrt{1+a^2}-a$ の円柱に含まれるので

$$U(a)\leqq(\sqrt{1+a^2}-a)\pi$$

$\lim_{a\to\infty}(\sqrt{1+a^2}-a)\pi=0$，　また $U(a)>0$ なので

はさみうちの原理より　$\lim_{a\to\infty}U(a)=0$

$V(a)=W(a)+U(a)$ なので

$$\lim_{a\to\infty} V(a) = \lim_{a\to\infty}(W(a)+U(a))$$

$$= \frac{2}{3}\pi + 0$$

$$= \frac{2}{3}\pi \quad \cdots \text{（答）}$$

【第５問】

予想配点　20 ／ 120 点	**時間配分の目安**　25 ／ 150 分
出題分野　微分（Ⅲ）	
出題形式　証明	
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す （１）Ｂ　　（２）Ｂ	

●**解答のポイント＆学習対策等**

（１）では対数をとれるかがポイント。底と指数の両方に変数があるときは原則として対数をとるとよい。導関数から増減表をつくれないときは２次導関数。

（１）をどう扱い、（２）を導くか。$x=\pm 0.01$ を先に代入すると式変形が見えにくく、x のまま扱うと値がイメージしにくい。両者を並行して扱える複眼的視野がほしい。

●**解答**

(1)　両辺正なので、$-1<x<1,\ x\neq 0,$ のとき

$$\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < \log(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \cdots *$$

を示せばよい。

（＊の左辺）－（＊の右辺）＝ $f(x)$ とすると

$$f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x) - \frac{1}{x}\log(1-x)$$

$$= \frac{1}{x}\{-(1-x)\log(1-x) - \log(1+x)\}$$

$-(1-x)\log(1-x) - \log(1+x) = g'(x)$ とする

$$g'(x) = \log(1-x) + 1 - \frac{1}{1+x}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$$

$g'(0)=0,\ g(x)=0$ であることから

関数 $g'(x),\ g(x)$ の増減表は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1

$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		[illegible]	0	[illegible]	

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$		[illegible]	0	[illegible]	

よって　$g(x) > 0 \quad (-1 < x < 0)$

$g(x) < 0 \quad (0 < x < 1)$

$f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$　より　$f(x) < 0 \quad (-1 < x < 1,\ x \neq 0)$

よって＊は示された。　　　（証明終）

(2)　$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \cdots *$

＊の両辺に

$(1+x)^{1-\frac{1}{x}} \ (>0)$ をかける

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}$$

$$(1-x^2)^{1-\frac{1}{x}} < 1+x$$

$x = -0.01$ を代入

$0.9999^{101} < 0.99 \quad \cdots①$

＊の両辺に

$(1-x)^{\frac{1}{x}} \ (>0)$ をかける

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}$$

$$1-x < (1-x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$x = 0.01$ を代入

$0.99 < 0.9999^{100} \quad \cdots②$

①，②より

$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$　　　（証明終）

【第６問】

予想配点　20 ／ 120 点	**時間配分の目安**　40 ／ 150 分
出題分野　平面ベクトル	
出題形式　証明	
小問別難易度　※問題難易度：C 難問、B 合否を分ける問題、A 正答すべき問題、を示す （１）Ｂ　（２）Ｂ　（３）Ｃ	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連	

●解答のポイント＆学習対策等

一見難問、しかし解きほぐしてみると

（１）「ある時刻 t 」から t の存在条件の問題だと気づくことができれば、ただの計算問題。

（２）気を付けるべきことは（１）の $|s-\theta|$ の絶対値の扱い。ベクトルは平行移動して考えやすいところを考える。

（３）最後の $\sin\frac{5\alpha}{2}$ の評価を除けば標準的問題。問題文のいかめしい姿にだまされず基本に忠実に解けるかがカギ。

●解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n(t)} /\!/ \overrightarrow{e_n}$ かつ $\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n(t)}\right|=t,\ \left|\overrightarrow{e_n}\right|=1$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n(t)}=t\overrightarrow{e_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3)$$

よって

$$\begin{aligned}d(\mathrm{P}_1(t),\ \mathrm{P}_2(t))&=\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1(t)\mathrm{P}_2(t)}\right|\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{P}_2(t)}-\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{P}_1(t)}\right|\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}+\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{P}_2(t)}-\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{P}_1(t)}\right|\\&=\left|\overrightarrow{a_1}-t(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})\right|\end{aligned}$$

また

$d(\mathrm{P}_1(t),\ \mathrm{P}_2(t))\leqq 1$ より

$$\left|\overrightarrow{a_1}-t(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})\right|\leqq 1$$

両辺 0 以上より 2 乗し

$$\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2-2t\overrightarrow{a_1}\cdot(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})+t^2\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|^2\leqq 1$$

$\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ のなす角を θ とすると

$$\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2-2t\left|\overrightarrow{a_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|\cos\theta+t^2\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|^2-1\leqq 0$$

$$t^2\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|-2t\left|\overrightarrow{a_1}\right|\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|\cos\theta+\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2-1\leqq 0$$

この式の左辺を $f(t)$ とする。

$f(0)=\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2-1>0\quad (\because\ \left|\overrightarrow{a_1}\right|=1000)$ より

$f(t)\leqq 0$ を満たす正の実数が存在する条件は、

$y=f(t)$ のグラフの頂点の t 座標が正かつ y 座標が 0 以下

$$f(t)=\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|^2\left(t-\frac{\left|\overrightarrow{a_1}\right|\cos\theta}{\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|}\right)^2-\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2\cos^2\theta+\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2-1 \text{ より}$$

$$\text{頂点}\left(\frac{\left|\overrightarrow{a_1}\right|\cos\theta}{\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|},\ -\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2\cos^2\theta+\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2-1\right)\text{なので}$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{a_1}\right|\cos\theta}{\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|}>0 \quad\text{かつ}\quad -\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2\cos^2\theta+\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2-1\leqq 0$$

$$\cos\theta>0 \quad\text{かつ}\quad \left|\overrightarrow{a_1}\right|^2(1-\cos^2\theta)\leqq 1 \quad \cdots①$$

①より $\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2\sin^2\theta\leqq 1$

$$1000^2\sin^2\theta\leqq 1 \quad (\because \left|\overrightarrow{a_1}\right|=1000)$$

$$\sin^2\theta\leqq\frac{1}{1000^2}$$

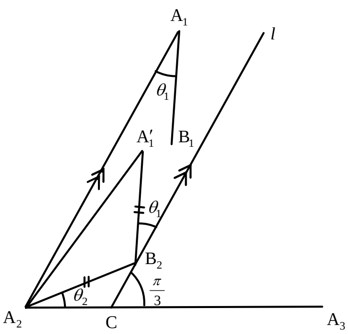
$$\left|\sin\theta\right|\leqq\frac{1}{1000}$$ （証明終）

(2)

図のように

点 B_2 を通り A_1A_2 と平行な直線を l とする

また $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1'B_2}$ となる点 A_1' をとる。



i) A_1' が $\triangle A_1A_2A_3$ の内部にあるとき

$$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_2B_2}$$

$$=\overrightarrow{A_1'B_2}+\overrightarrow{B_2A_2}$$

$$=\overrightarrow{A_1'A_2}$$

よって (1)で定めた θ を正とすると $\theta=\angle A_1'A_2A_1$ である。

(1)及び θ は正より $0<\theta\leqq\alpha$ …①

l と A_2A_3 の交点を C とすると

$$\angle A_2B_2C=\frac{\pi}{3}-\theta_2 \quad (\because \text{ 内角と外角の関係})$$

$$\angle A_1'B_2A_2=\pi-\left\{\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)+\theta_1\right\}=\frac{2\pi}{3}+\theta_2-\theta_1$$

$$\angle \mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2=\frac{1}{2}\left\{\pi-\left(\frac{2\pi}{3}+\theta_2-\theta_1\right)\right\}=\frac{\pi}{6}-\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$$

$$\angle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1'=\frac{\pi}{3}-\left\{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)+\theta_2\right\}=\frac{\pi}{6}-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

①より $0<\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\leqq\alpha$

$$\frac{\pi}{3}>\theta_1+\theta_2\geqq\frac{\pi}{3}-2\alpha$$

ii)　A_1' が $\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の外部にあるときも同様にして

$$\frac{\pi}{3}<\theta_1+\theta_2\leqq\frac{\pi}{3}+2\alpha$$

iii)　A_1' が辺 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ 上にあるときは

$$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{3}$$

i～iii より　$\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_1+\theta_2\leqq\dfrac{\pi}{3}+2\alpha$　…（答）

(3)　$d(\mathrm{P}_2(t_1),\ \mathrm{P}_3(t_1))\leqq1,\ d(\mathrm{P}_3(t_2),\ \mathrm{P}_1(t_2))\leqq1,\ d(\mathrm{P}_1(t_3),\ \mathrm{P}_2(t_3))\leqq1$

が成立するので、

(2)より $\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_2+\theta_3\leqq\dfrac{\pi}{3}+2\alpha$　…①

$$\frac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_3+\theta_1\leqq\frac{\pi}{3}+2\alpha\quad\cdots②$$

$$\frac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_1+\theta_2\leqq\frac{\pi}{3}+2\alpha\quad\cdots③$$

①～③の辺々を加え 2 で割ると、

$$\frac{\pi}{2}-3\alpha\leqq\theta_1+\theta_2+\theta_3\leqq\frac{\pi}{2}+3\alpha\quad\cdots④$$

①より $-\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\leqq-\theta_2-\theta_3\leqq-\dfrac{\pi}{3}+2\alpha$　…①′

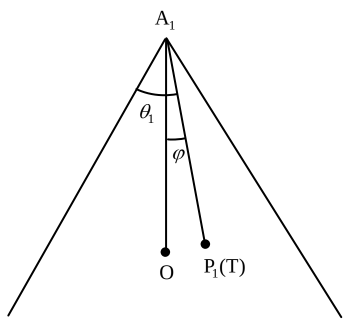
④，①′ の辺々を加え

$$\frac{\pi}{6}-5\alpha\leqq\theta_1\leqq\frac{\pi}{6}+5\alpha\quad\cdots⑤$$

ここで $\angle\mathrm{P}_1(t)\mathrm{AO}=\varphi$ とすると

$$\varphi=\left|\theta_1-\frac{\pi}{6}\right|$$

⑤より　$\varphi\leqq5\alpha$　…⑥

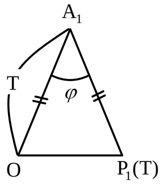


また、$A_1O=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ より

$A_1O=A_1P_1(T)=T$

$\triangle A_1OP_1(T)$ は二等辺三角形なので

$d\,(P_1(T),\ 0)=2\cdot T\sin\dfrac{\varphi}{2}$ $\cdots$⑦



ここで、$0\leqq x\leqq\dfrac{2\pi}{5}$ で、

$\dfrac{5}{2}\sin x\geqq\sin\dfrac{5}{2}x$ が成立する。

$\because$ $\dfrac{5}{2}\sin x-\sin\dfrac{5}{2}x=f(x)$ とすると

$$f'(x)=\frac{5}{2}\left\{\cos x-\cos\frac{5}{2}x\right\}$$

$0\leqq x\leqq\pi$ で、$\cos x$ は単調減少なので

$0\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}x\leqq\pi$ であるとき

$f'(x)\geqq 0$

また、$f(0)=0$ より

$0\leqq x\leqq\dfrac{2}{5}\pi$ で $f(x)\geqq 0$ $\quad\therefore\ \dfrac{5}{2}\sin x\geqq\sin\dfrac{5}{2}x$

$0<\alpha<\dfrac{2}{5}\pi$ は明らか。

$\therefore\ \sin\dfrac{5}{2}\alpha\leqq\dfrac{5}{2}\sin\alpha$ $\cdots$⑧

⑥，⑦，⑧より

$$\begin{aligned}d\,(P_1(T),\ 0)&=2T\sin\frac{\varphi}{2}\\&\leqq 2T\sin\frac{5\alpha}{2}\quad(\because\ ⑦)\\&\leqq 2T\frac{5}{2}\sin\alpha\\&=2\cdot\frac{1000}{\sqrt{3}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1000}\\&=\frac{5}{\sqrt{3}}\\&<3\end{aligned}$$

$P_2(T)$，$P_3(T)$ についても同様なので題意は示された。　　（証明終）