Benesse® お茶の水ゼミナール

東京大学　文科-前期　数学

総　論

満　点　80 点	**目標得点**　62 点	**試験時間**　100 分	**偏差値**　文Ⅰ:76　文Ⅱ:75　文Ⅲ:74
大問数　4	**小問数**　9		
〔解答形式〕	**マーク式**　0/9問	**短答式**　0/9問	**記述式**　9/9問
〔問題難易度〕	**C**　0/9問	**B**　5/9問	**A**　4/9問
※問題難易度：C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す			

Topics

1：＜出題分野＞　「整数」「図形」「微積分」「確率」から各１問　＜お茶ゼミ予想と一致＞

2：＜難 易 度＞　ここ数年の傾向のとおり、易化が進む　＜お茶ゼミ予想と一致＞

3：＜対　　策＞　例年通り、「題意の読み取り」が合否を分けるような問題中心

こんな力が求められる！

東大の入試問題は、数学に限らず全教科で「読解力」が問われる。2009 年度の数学も例外ではなく、題意を正確に捉えられさえすれば、あとは単純な計算作業で、時間内に十分に満点を狙えるレベルの問題である。「東京大学」という４文字に怯えるあまり、不必要に難易度の高い問題に拘泥したり、ひたすら問題数だけをこなす学習よりも、本質的な理解を深め、問題の要点を掴む学習が有効であり、その結果、冷静に実力を答案にできた人が報われる問題であった。数学の問題難易度の易化には目を見張るものがあり、対策をできた人間と、できていない人間とで大きな差を作ってしまっているのが現実である。高校のカリキュラムペースに任せずに、少なくとも高３初めから講座等で十分に意識を高める必要がある。

参考図書

平常授業の「高２東大・一橋大数学」「高３東大・一橋大文系数学」テキストに多数類題が含まれる。加えて、上記２講座テキスト以外にも、「夏期高３整数攻略」「夏期高３図形攻略」「夏期高３確率・数列攻略」なども大いに参考になる問題が多数掲載されている。

大 問 別 分 析

【第１問】

予想配点　20 / 80 点	**時間配分の目安**　20 / 100 分	**目標得点**　20 / 20 点
出題分野　図形と方程式		
出題形式　計算		
小問別難易度　※問題難易度：C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す （1）A　（2）A		
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 ■「通年高２東大・一橋大数学」 ・「図形と方程式」のセクションに円を扱う類題が含まれる。 ■「通年高３東大・一橋大文系数学」 ・「図形・ベクトル」のセクションに２つ以上の円を扱う類題が含まれる。 ■「夏期高３図形攻略」 ・動点などを題材にした、動きに伴う図形量の max, min を扱う類題が含まれる。		

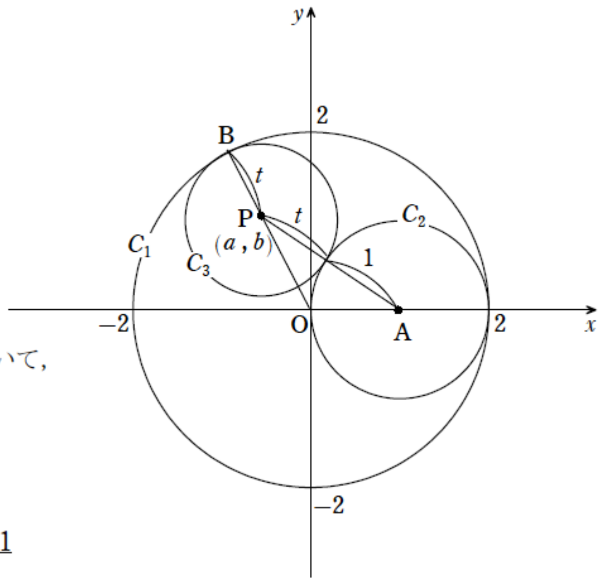
以上の類題を経験していた生徒に、非常に簡単に感じさせた問題だと思われる。

●解答のポイント＆学習対策等

問題文で与えられた条件を、迅速に、きちんと図示できる能力が必要。逆に、題意を正確に図示できれば、あとは初歩的な計算のみで正答に至る。強いて言えば、t の範囲をきちんと絞れるかがポイントではあるが、図から自然に限界は考えることができるので、さほど受験生を苦しめないものだと思われる。「夏期高３図形攻略」受講者には、簡単に感じすぎて、逆に物足りなかったのではないかと危惧さえさせる、得点必須の問題である。

解

(1)　O$(0,0)$，A$(1,0)$，P(a,b)とする．



右図より，

$\overline{\mathrm{AP}}=1+t=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$　…①

$\overline{\mathrm{OP}}=2-t=\sqrt{a^2+b^2}$　…②

①，②より，$b>0$に注意し，a,bについて解いて，

$\underline{a=2-3t\ ,\ b=\sqrt{8t(1-t)}}$

この値の形から，$0<t<1$

また，C_3はC_1の内部なので，$0<t<2$

よって，tのとり得る値の範囲は　$\underline{0<t<1}$

(2)

$b^2=-8t^2+8t=-8\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+2$

$0<t<1$の変域で考えると，$0<b^2\leqq 2$

よって，b の最大値は，　$\underline{{}_{\max}b=\sqrt{2}}$

【第２問】

予想配点　20 ／ 80 点	**時間配分の目安**　25 ／ 100 分	**目標得点**　12 ／ 20 点
出題分野　整数・二項係数・数学的帰納法		
出題形式　証明		
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す （１）Ｂ　（２）Ｂ		
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 ■「通年高２東大・一橋大数学」 ・「数列」「整数」「場合の数・確率」のセクションにコンビネーションを扱う類題が含まれる。 ■「通年高３東大・一橋大文系数学」 ・「整数」のセクションに円を扱うコンビネーションを扱う的中題が含まれる。 ■「夏期高３整数攻略」 ・フェルマーの小定理まで踏み込んだ、的中題が含まれる。 以上の的中題・類題を経験していた生徒には、既視感を与えた問題だと思われる。		

●解答のポイント＆学習対策等

Ｃ（コンビネーション）、２項定理に関して正しい理解をしておくことが必要。これらは、高校の教科書の内容理解では届かない部分でもあるが、お茶ゼミの講義では当然のように運用される基本的な概念でもある。あとは、数学的帰納法の手法をきちんと構成し、解答として完成できるかが問われる。この部分は、十分に教科書レベルである。

解

(1)

まず，${}_m\mathrm{C}_1=m$ より，$k=1$ のとき ${}_m\mathrm{C}_k$ は m の倍数である．

$2\leqq k\leqq m-1$ において，

一般に，$k\,{}_m\mathrm{C}_k=m\,{}_{m-1}\mathrm{C}_{k-1}$ …①　が成り立つ．

また，m:*prime* であるから，m と k は *coprime* である．

よって，①において，右辺が m の倍数であるから，左辺の ${}_m\mathrm{C}_k$ は m の倍数．

以上で，題意は示された．

(2)

(i)　$k=1$ のとき，$k^m-k=1^m-1=0$ より，d_m で割り切れる．

(ii)　$k=l$　$(l\geqq 2)$ のとき，k^m-k が d_m で割り切れると仮定．

したがって，l^m-l は d_m で割り切れる．…②

$k=l+1$ のとき，

$$(l+1)^m-(l+1)={}_m\mathrm{C}_0l^m+{}_m\mathrm{C}_1l^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_2l^{m-2}+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}l+{}_m\mathrm{C}_m-l-1$$
$$=(l^m-l)+{}_m\mathrm{C}_1l^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_2l^{m-2}+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}l$$

上式において，②より，l^m-l は d_m で割り切れる．また，(1)より，d_m が ${}_m\mathrm{C}_k\,(1\leqq k\leqq m-1)$ の最大公約数であるから，${}_m\mathrm{C}_1l^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_2l^{m-2}+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}l$ も d_m で割り切れる．

(i)(ii)より，数学的帰納法によって，題意が示された．

【第３問】

予想配点　20 / 80 点	時間配分の目安　20 / 100 分	目標得点　16 / 20 点
出題分野　確率		
出題形式　計算		
小問別難易度　※問題難易度：C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す （１）A　（２）A　（３） B		
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 ■「通年高２東大・一橋大数学」 ・「場合の数・確率」のセクションに類題が含まれる。 ■「通年高３東大・一橋大文系数学」 ・「場合の数・確率」のセクションに類題が多数含まれる。 ■「夏期高３確率攻略」 ・カードゲームを題材にした類題が多数含まれる。 以上の類題を経験していた生徒は、冷静に題意を捉え、非常に簡単に、かつ短時間で正答できたものと思われる。		

●解答のポイント＆学習対策等

問題文で与えられた「試行の手順」を冷静に、正確に、解釈することが必要。これは、平常授業の「高３東大・一橋大文系数学」と、直前期のテストゼミを経験しているかどうかで合否が分かれたものだとも思われる。通年講義でも述べているように「題意の読み取り」は、数学に限らず東大入試全科目共通のテーマでもあり、十分に意識して学習に臨みたい。

$\boxed{\text{解}}$

(1)　まず，Lのみについて考える．

5回の内訳は，ある1色が2回出て，他3色が1回ずつ出ればよい．

どの色が2回出るかは　${}_4C_1=4$

5回の順列は，同じものを含む順列を考えて，$\dfrac{5!}{2!1!1!1!}=60$

よって，Lに4色がすべてが入っている確率は，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\cdot 4\cdot 60=\dfrac{15}{64}$

これはRについて考えても同様なので，

$P_1=\left(\dfrac{15}{64}\right)^2=\underline{\dfrac{225}{4096}}$

(2)　(C)を5回行って，Lに4色がすべてが入っている確率は，(A)を5回行って，Lに4色がすべてが入っている確率と等しい．よって(1)より，

$P_2=\underline{\dfrac{15}{64}}$

(3)　P_3は，(C)を 10 回行って，すべての色が少なくとも 2 回ずつ出る確率である．

すべての色が少なくとも 2 回ずつ出るのは，

(i) ある 1 色が 4 回出て，他 3 色が 2 回ずつ出る．

(ii)ある 2 色が 3 回ずつ出て，他 2 色が 2 回ずつ出る．

の 2 つの場合がある．

(i)の場合

どの色が 4 回出るかは　${}_4C_1=4$

10 回の順列は，同じものを含む順列を考えて，$\dfrac{10!}{4!2!2!2!}$

よって，(i)の確率は，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}\cdot 4\cdot\dfrac{10!}{4!2!2!2!}$

(ii)の場合

どの 2 色が 3 回出るかは　${}_4C_2=6$

10 回の順列は，同じものを含む順列を考えて，$\dfrac{10!}{3!3!2!2!}$

よって，(ii)の確率は，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}\cdot 6\cdot\dfrac{10!}{3!3!2!2!}$

(i)(ii)より，

$$P_3=\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(4\cdot\frac{10!}{4!2!2!2!}+6\cdot\frac{10!}{3!3!2!2!}\right)=\frac{3\cdot 10!}{48}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

よって

$$\frac{P_3}{P_1}=\underline{\frac{63}{16}}$$

【第４問】

予想配点　20 ／ 80 点	時間配分の目安　25 ／ 100 分	目標得点　14 ／ 20 点
出題分野　微積分		
出題形式　計算		
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す （１）Ｂ　　（２）Ｂ		
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 ■「通年高２東大・一橋大数学」 ・「微積分」のセクションに類題が含まれる。 ■「通年高３東大・一橋大文系数学」 ・「微積分」のセクションに、本題よりも少し難度を上げた類題が含まれる。 ■「夏期高３東大・一橋大文系数学」 ・積分方程式・定積分を含む関数を題材にした類題が多数含まれる。 以上の類題を経験していた生徒は、冷静に計算作業に集中できたことだと思われる。		

●解答のポイント＆学習対策等

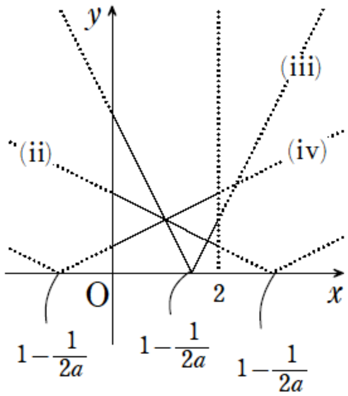
図形的に捉え、要領よく解く解法もあるが、それが思いつかなくとも、場合分けを慎重に行い、計算を行うのみで十分に時間内で処理できる。東大では「微積分」分野から「積分方程式・定積分を含む関数」が頻出であることは、通年授業では受講生全員が共有している事実であり、平常授業受講者には大いに有利に働いたものだと思われる。

解

$f(0)=c=0$, $f(2)=4a+2b=2$ より, $b=1-2a$, $c=0$

$f(x)=ax^2+(1-2a)x$

$f'(x)=2ax+(1-2a)$



(1)

$y=|f'(x)|=|2ax+(1-2a)|$ のグラフと

x 軸との位置関係を考えて,

(i)　$a=0$ のとき, $f'(x)=1$ であるから,

$$S=\int_0^2 1dx=2$$

(ii)　$a\fallingdotseq 0$, $1-\frac{1}{2a}\geqq 2$　$\left(-\frac{1}{2}<a<0\right)$ のとき,

$$S=\int_0^2|f'\ x|dx=\int_0^2(2ax+(1-2a))dx=2$$

(iii)　$a\fallingdotseq 0$, $0\leqq 1-\frac{1}{2a}\leqq 2$　$\left(a\leqq -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\leqq a\right)$ のとき,

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx$$

$$=\begin{cases} (a>0\text{のとき}) & \int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^{1-\frac{1}{2a}}-f'(x)dx+\int_{1-\frac{1}{2a}}^2 f'(x)dx=\frac{4a^2+1}{2a} \\ (a<0\text{のとき}) & \int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^{1-\frac{1}{2a}}f'(x)dx+\int_{1-\frac{1}{2a}}^2 -f'(x)dx=-\frac{4a^2+1}{2a} \end{cases}$$

(iv)　$a\fallingdotseq 0$, $1-\frac{1}{2a}\leqq 0$　$\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$ のとき,

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^2(2ax+(1-2a))dx=2$$

(i)～(iv)より,

$$S=\begin{cases} 2 & \left(-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{4a^2+1}{2a} & \left(\dfrac{1}{2}<a\right) \\ -\dfrac{4a^2\pm1}{2a} & \left(a<\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

(2)

(1)(iii)において，相加相乗平均の関係から，

$0<a$のとき，$\dfrac{4a^2+1}{2a}=2a+\dfrac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\dfrac{1}{2a}}=2$　　（等号は$a=\dfrac{1}{2}$のとき）

$a<0$のとき，$-\dfrac{4a^2+1}{2a}=(-2a)+\left(-\dfrac{1}{2a}\right)\geqq 2\sqrt{(-2a)\cdot\left(-\dfrac{1}{2a}\right)}=2$　　（等号は$a=-\dfrac{1}{2}$のとき）

(i)(ii)(iv)と合わせて考えて，

Sの最小値は　$_{\min}S=2$