Benesse® お茶の水ゼミナール

慶應義塾大学　薬学部

数学

総　論

満　点　100 点	**目標得点**　75 点	**試験時間**　80 分	**偏差値**　薬:68　薬科:67
大問数　4	**小問数**　18		
〔解答形式〕	**マーク式**　18/18 問	**短答式**　0/18 問	**記述式**　0/18 問
〔問題難易度〕	**C**　0/18 問	**B**　10／18 問	**A**　8/18 問
※問題難易度：C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す			

Topics

１：共立薬科大が慶大薬学部になってから、２年目（２回目）の入試である。

２：08 年はマークセンス大問６題であったが、09 年は４題に減った。すべてマークセンスは変わっていない。

３：難問はなく、すべて基礎から標準的な問題。時間の割には計算量が多く、問題を素早く正確に解く力を要求されている出題である。

こんな力が求められる！

合格するための目標点数は 75 点である。これは、問題レベルと試験時間が異なるが、それを考慮してセンター試験に対応させてみると、「数学ＩＡ：90 点」「数学ⅡＢ：80 点」が必要である。慶大薬学部にもセンター試験にも共通なことだが、「素早く正確に」解く力が必要とされる。

慶大薬学部の問題は、教科書レベルで十分に解くことのできる問題（難易度Ａ）と、入試問題として標準的な問題でいわゆる「入試典型・有名問題」と「その場で考える問題」（難易度Ｂ）がバランスよく出題されているため、しっかりと勉強した受験生とそうでない受験生とできれいに差のつく入試問題である。楽に解ける問題（容易な問題など）は落とさず、考える問題はじっくりと考え、素早く計算するという力が要求されているのである。以下、入試で成功するための学習方法を、お茶ゼミのテキスト「ハイレベル数学ＩＡⅡＢ」を例にとって述べる。

ハイレベル数学ＩＡⅡＢでは、まずは問題を解くための道具となる概念や典型問題を、７月までに学習し終えることになる。これをすべてしっかりとマスターすることで、慶大薬学部の入試問題を、時間を気にしないで解けば６割は十分に得点できる。しかし、点数的にも１～２割足りないし、結局は時間との勝負である。点数的に１～２割を加えるためには、夏期と二学期以降学習する実戦演習が重要である。いわゆる融合問題や総合問題を実戦的に演習することによって、一学期に身につけた問題を解くための道具や典型問題の解法をどのように活かしていくかを学ぶ。さらに、時間を意識して問題を解く練習も必要であるから、過去問（他の私大薬学部の入試問題の利用）を用いて、制限時間内に解くという練習を積んでいくのが二学期から直前期までの課題である。

この流れで学習することによって、慶大薬学部に合格するための数学の力をつけることができる。

大問別分析

【Ⅰ】

予想配点　40 ／ 100 点	**時間配分の目安**　25 ／ 80 分
問題形式　マークセンス方式	
出題分野　３次方程式の解（数Ⅱ）、三角関数（数ⅠⅡ）、図形と方程式（数Ⅱ）、準有名角の三角比の値（数Ⅰ）、桁数の問題（数Ⅱ）	
出題形式　計算	
小問別難易度　※問題難易度：C 難問、B 合否を分ける問題、A 正答すべき問題、を示す (1)　[(1)(2)]　A　　[(3)(4)]　A (2)　[(5)(6)(7)(8)]　A　　[(9)(10)(11)(12)]　A (3)　[(13)(14)(15)]　B　　[(16)(17)(18)]　B (4)　[(19)(20)(21)]　B　　[(22)(23)(24)(25)(26)]　B (5)　[(27)(28)]　A　　[(29)]　B	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 どれも典型問題であり、３月期～７月期の際に「ハイレベル数学ⅠＡⅡＢ」や「センター数学」で一度は扱っている（予習問題 or 講義問題 or 復習問題のいずれか）。よって、すべての問題が的中しているといっても過言ではない。	

●**解答**

(1)　$x=2-i$ が解であるから、$x=2+i$ も解であり、残り 1 つの解は実数解であるから、それを α とおく。解と係数の関係より

$$\begin{cases}(2-i)+(2+i)+\alpha & =-a \quad \cdots① \\ (2-i)(2+i)+(2+i)\alpha+\alpha(2-i) & =-3 \quad \cdots② \\ (2-i)(2+i)\alpha & =-10 \cdots③\end{cases}$$

を満たすことから、

②より、$5+4\alpha=-3$　　$\therefore\ \alpha=-2$

これを①に代入して、$a=-2$

（$\alpha=-2,\ a=-2$ を③に代入すると、等式を満たす）

以上より、求める a の値は $\boxed{a=-2}$ ・・・（答）であり、この方程式の実数解は $\boxed{x=-2}$ ・・・（答）である。

(2)　$f(x)=\sqrt{3}\sin x+3\cos x$

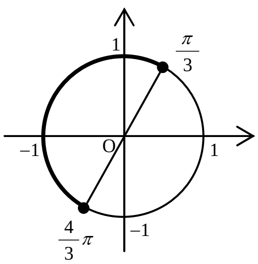
$$=2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

と合成すると、$0\leqq x\leqq\pi$ より、

$$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4}{3}\pi$$

であり、単位円より、

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$$



$\therefore\quad \boxed{-3 \leqq f(x) \leqq 2\sqrt{3}}$ ・・・（答）

となる。

一方、

$$g(x) = 3\sin^2 x + 6\sqrt{3}\sin x\cos x + 9\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x - 6\cos x$$

$$= (\sqrt{3}\sin x + 3\cos x)^2 - 2(\sqrt{3}\sin x + 3\cos x)$$

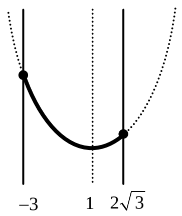
と変形でき、$\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = t$ とおくと、先の問より、

$$-3 \leqq t \leqq 2\sqrt{3}$$

であるから、

$$g(x) = t^2 - 2t$$

$$= (t-1)^2 - 1 \quad (= h(t))$$



と平方完成して、$-3 \leqq t \leqq 2\sqrt{3}$ においてグラフを考えれば、

$$h(1) \leqq g(x) \leqq h(-3)$$

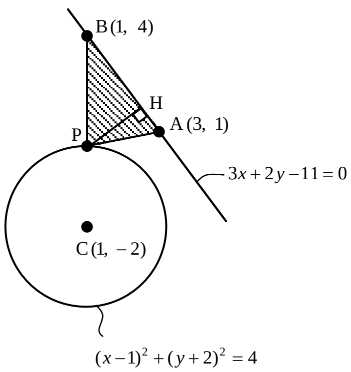
$\therefore\quad \boxed{-1 \leqq g(x) \leqq 15}$ ・・・（答）

となる。

(3)　点 P を固定して考える。

点 P から直線 AB に下ろした垂線の足を H とすると、

△PAB の面積



$$= \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{PH}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 3^2} \times \mathrm{PH}$$

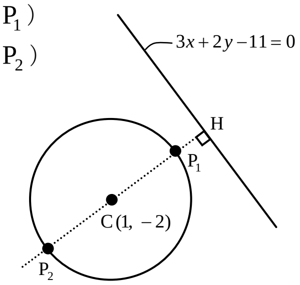
$$= \frac{\sqrt{13}}{2}\mathrm{PH}$$

であるから、PH の長さが最大になるときを考えればよい。

ここで、固定しておいた点 P を動かして考える。円の中心を C とすると、

・C, P, H がこの順に一直線上にあるとき、PH の長さが最小（右図の P_1）

・P, C, H がこの順に一直線上にあるとき、PH の長さが最大（右図の P_2）



となり、直線 AB の式は $3x + 2y - 11 = 0$ より、

$$\mathrm{PH}\min = \mathrm{CH} - (\text{円の半径})$$

$$= \frac{|3 - 4 - 11|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} - 2$$

$$=\frac{12}{\sqrt{13}}-2$$

$PH\max = CH + $(円の半径)

$$=\frac{12}{\sqrt{13}}+2$$

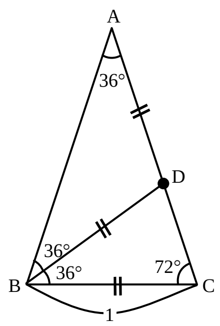
だから、

△ABP の面積の

最小値：$\dfrac{\sqrt{13}}{2}\left(\dfrac{12}{\sqrt{13}}-2\right)=\boxed{6-\sqrt{13}}$ ・・・（答）

最大値：$\dfrac{\sqrt{13}}{2}\left(\dfrac{12}{\sqrt{13}}+2\right)=\boxed{6+\sqrt{13}}$ ・・・（答）

(4)　右図のように底角が 72°，底辺の長さ 1，　AB = AC である二等辺三角形を考え、



$BC = BD = AD \ \ (=1)$

となる点 D を辺 AC 上にとる。

すると、△ABC∽△BCD であるから、 $CD = x$ とおくと、

$$\frac{BC}{CD}=\frac{AC}{BC}$$

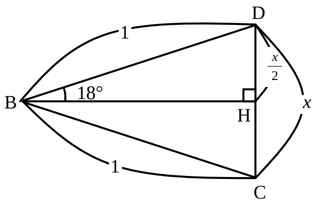
$$\therefore\quad \frac{1}{x}=\frac{x+1}{1}$$

$$\therefore\quad x(x+1)=1$$

$$\therefore\quad x^2+x-1=0$$

$x>0$ より、 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

右図のように、点 B から辺 CD に垂線を下ろし、その足を H とすると、



$$DH=\frac{x}{2}$$

となるので、

$$\sin 18^\circ=\frac{DH}{BD}$$

$$=\frac{x}{2}=\boxed{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}\ \cdots（答）$$

また、 $\sin^2 18^\circ+\cos^2 18^\circ=1$ であり、 $\cos 18^\circ>0$ より、

$$\cos 18^\circ=\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\boxed{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$ ・・・（答）

(5)　$\log_{10}12^{60}$

$=60\log_{10}12$

$=60\log_{10}(2^2\cdot 3)$

$=60(\log_{10}2^2+\log_{10}3)$

$=60(2\log_{10}2+\log_{10}3)$

$=60(2\cdot 0.3010+0.4771)$

$=64.746$

$\therefore\ \ 12^{60}=10^{64.746}$

$=10^{0.746}\times 10^{64}$

となるので、12^{60}は$\boxed{65\text{桁}}$ ・・・（答）の整数であり、

$\log_{10}10^{0.746}=0.746$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}$

$=\log_{10}10-\log_{10}2$

$=1-0.3010$

$=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}(2\cdot 3)$

$=\log_{10}2+\log_{10}3$

$=0.3010+0.4771$

$=0.7781$

より、$\log_{10}5<\log_{10}10^{0.746}<\log_{10}6$

$\therefore\ \ 5<10^{0.746}<6\quad(\because\ \text{底}10(>1)\text{より})$

だから、最高位の数字は$\boxed{5}$ ・・・（答）である。

●検討すべき点

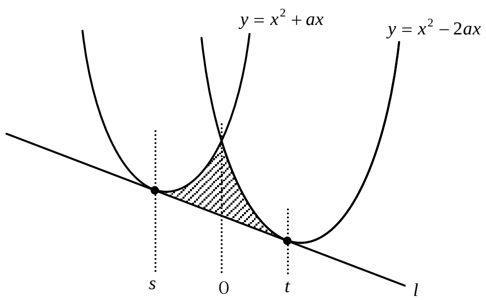
(1) (2) は基本問題なので必ず正解したい。(3) に関しては、三角形の面積をどのように考えるかがポイントとなる。不変なものと変化するものを意識することが大切である。(4) は一度経験をしていないと説きにくい問題であり、慶大・薬を受験する人は一度経験をしておきたい。(5) の前半は教科書レベルの基本計算だが、後半は受験生にとって未定着の問題。それでも典型的な有名問題であるから、早いうちに経験をしておきたい。

全体的に〔Ｉ〕は基本計算から出題されているため、難易度Ａに該当する問題はすべて完答し、Ｂに該当する５問のうち、４問は正解したい。

【Ⅱ】

予想配点　20 / 100 点	**時間配分の目安**　15 / 80 分
問題形式　マークセンス方式	
出題分野　微積分（数Ⅱ）	
出題形式　計算	
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す (1)　[(30)(31)(32)(33)(34)(35)]　A (2)　[(36)(37)(38)(39)]　A	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 お茶ゼミテキストの「ハイレベル数学ⅠＡⅡＢ」で、６月期で類題を扱っている。	

●解答



(1)　$y=x^2+ax$ において、点 $(s,\ s^2+as)$ における接線の方程式は、 $y'=2x+a$ より、

$y=(2s+a)(x-s)+s^2+as$

$\therefore\quad y=(2s+a)x-s^2$　…①

$y=x^2-2ax$ において、点 $(t,\ t^2-2at)$ における接線の方程式は、 $y'=2x-2a$ より、

$y=(2t-2a)(x-t)+t^2-2at$

$\therefore\quad y=(2t-2a)x-t^2$　…②

①と②が一致するときを考えればよいので、

$$\begin{cases} 2s+a=2t-2a & \cdots③ \\ -s^2=-t^2 & \cdots④ \end{cases}$$

③かつ④が成立するときを考える。

③より、 $t=\dfrac{2s+3a}{2}$ と変形して④に代入すれば、

$$s^2=\left(\frac{2s+3a}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad s^2=s^2+3as+\frac{9}{4}a^2$$

$$\therefore\quad s=-\frac{3}{4}a\quad\cdots⑤$$

このとき、③に代入すれば、

$$-\frac{3}{2}a+a=2t-2a$$

$$\therefore\quad t=\frac{3}{4}a\quad\cdots⑥$$

⑤を①に代入すれば、求める l の方程式は、 $\boxed{y=\frac{-1}{2}ax-\frac{9}{16}a^2}$ ・・・（答）である。

(2) $$S=\int_s^0\left\{x^2+ax-\left(\frac{-1}{2}ax-\frac{9}{16}a^2\right)\right\}dx+\int_0^t\left\{x^2-2ax-\left(\frac{-1}{2}ax-\frac{9}{16}a^2\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{3}{4}a}^0\left(x+\frac{3}{4}a\right)^2dx+\int_0^{\frac{3}{4}a}\left(x-\frac{3}{4}a\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{4}a\right)^3\right]_{-\frac{3}{4}a}^0+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{4}a\right)^3\right]_0^{\frac{3}{4}a}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}a\right)^3-0+0-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{4}a\right)^3$$

$$=\frac{9}{64}a^3+\frac{9}{64}a^3$$

$$=\boxed{\frac{9}{32}a^3}$$

となる。

●検討すべき点

(1)は共通接線を求める問題。方法はいろいろと考えられるが、通常は片方の接線の方程式ともう片方の接線が一致するときを考える解法が一般的。この方法は解答例に記載してあるので、確認してほしい。もう一つの方法は、判別式の利用である。今回の問題であれば、この方法でも解けるので、別解として以下述べる。

〈(1)別解〉

$y=x^2+ax$ の点 $(t,\ t^2+at)$ における接線の方程式は $y'=2x+a$ より、

$y=(2t+a)(x-t)+t^2+at$ とかけ、これが $y=x^2-2ax$ に接するときを考えるので、

$$x^2-2ax=(2t+a)(x-t)+t^2+at$$

$$\therefore\quad x^2-(2t+3a)x+t^2=0 \quad \cdots (*)$$

（＊）の判別式を D とすると、$D=0$ のときを考えればよい。このとき、

$$(2t+3a)^2-4\cdot 1\cdot t^2=0$$

$$\therefore\quad 16at+9a^2=0 \qquad \therefore\quad t=-\frac{3}{4}a$$

となるので、求める接線の方程式は、$y=\frac{-1}{2}ax-\frac{9}{16}a^2$ …（答）となる。

以上が別解であるが、これだと(2)の際にまた新たな計算をする必要が出てくるため、時間ということを意識するとあまり得策ではない。

(2)は面積を求める基本計算。ただ、多くの教科書には記載されていない定積分の方法、$\int (x+a)^2dx=\frac{1}{3}(x+a)^3+C$ （C ：積分定数）を知っておくと計算は早い。

(1)(2)のいずれも、基本問題であるから、絶対に正解したい。

【Ⅲ】

予想配点　20 ／ 100 点	**時間配分の目安**　20 ／ 80 分
問題形式　マークセンス方式	
出題分野　確率（数Ａ）	
出題形式　計算	
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す (1)　[(40)(41)(42)(43)]A (2)　[(44)(45)(46)(47)(48)(49)]　B (3)　[(50)(51)(52)(53)(54)(55)(56)(57)(58)(59)]　B	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 お茶ゼミテキストの「ハイレベル数学ⅠＡⅡＢ」で、７月期で類題を扱っている。	

●解答

x_1，x_2，x_3，x_4 の決め方は全部で n^4 通りあり、これらは同様に確からしい。

(1)　$n=12$ より、$1\leqq x_1<x_2\leqq 12$ を満たすので、1から12の12個の自然数から２個選ぶことで $(x_1,\ x_2)$ の組は自動的に決まる。その方法は ${}_{12}\mathrm{C}_2$ 通り。

また、x_3，x_4 は、それぞれ1から12の12個の自然数から一つずつ選べばよく、その方法は 12^2 通り。

よって、求める確率は $\frac{{}_{12}\mathrm{C}_2\times 12^2}{12^4}=\frac{11}{24}$ …（答）である。

(2)（1）と同様に、$1\leqq x_1<x_2\leqq x_3\leqq 12$ を満たすが、これを $1\leqq x_1<x_2<x_3+1\leqq 12+1$ と変形して、

$x_1=A,\ x_2=B,\ x_3+1=C$ とおけば、$1\leqq A<B<C\leqq 13$ となる。

さて、$(x_1,\ x_2,\ x_3)$ の一組と $(A,\ B,\ C)$ の一組は一対一に対応するので、$(A,\ B,\ C)$ の組を数えることにする。1から13の 13 個の自然数から 3 個選ぶことで $(A,\ B,\ C)$ の組は自動的に決まり、その方法は ${}_{13}\mathrm{C}_3$ 通り。

また、x_4 は1から12 の 12 個の自然数から一つ選べばよく、その方法は12 通り。

よって、求める確率は $\dfrac{{}_{13}\mathrm{C}_3\times 12}{12^4}=\dfrac{143}{864}$ …（答）である。

(3) $x_1<x_2<x_3>x_4$ を満たすときを考えるが、まずは $x_3=k$ （$k=3,\ 4,\ \cdots,\ n$）のときを考える。

このとき、1から $k-1$ の 12 個の自然数から 2 個選ぶことで $(x_1,\ x_2)$ の組は自動的に決まり、その方法は ${}_{k-1}\mathrm{C}_2$ 通り。また、x_4 は1から $k-1$ の $k-1$ 個の自然数から一つ選べばよく、その方法は $k-1$ 通り。

したがって、$x_3=k$ （$k=3,\ 4,\ \cdots,\ n$）となる確率は $\dfrac{{}_{k-1}\mathrm{C}_2\times(k-1)}{n^4}$ となるので、求める確率は

$$\frac{f(n)}{n^4}=\sum_{k=3}^{n}\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_2\times(k-1)}{n^4}=\frac{1}{n^4}\sum_{k=3}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_2\times(k-1)$$ となる。

よって、

$$f(n)=\sum_{k=3}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_2\times(k-1)$$

$$=\sum_{k=3}^{n}\frac{(k-1)(k-2)}{2\cdot 1}\times(k-1)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}(k-1)^2(k-2)=\frac{1}{2}\{2^2\cdot 1+3^2\cdot 2+\cdots+(n-1)^2(n-2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2}k(k+1)^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2}(k^3+2k^2+k)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}(n-2)^2(n-1)^2+2\cdot\frac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3)+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}(n-2)(n-1)\{3(n-2)(n-1)+4(2n-3)+6\}$$

$$=\frac{1}{24}(n-2)(n-1)(3n^2-n)\left(=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n-1)\right)$$

$$=\frac{3n^4-10n^3+9n^2-2n}{24}=\frac{1}{8}n^4-\frac{5}{12}n^3+\frac{3}{8}n^2-\frac{1}{12}n \quad \cdots（答）$$

である。

●検討すべき点

(1)は基本的な計算なので、必ず正解したい。問題は(2)と(3)である。(2)は解答例にも記載したとおりの解法ができると得点をしやすいので、是非とも身につけておきたい。そうでない解法であれば、次の解法がある。

〈(2)別解〉

$1 \leqq x_1 < x_2 \leqq x_3 \leqq 12$ を

・Case 1 ：$1 \leqq x_1 < x_2 < x_3 \leqq 12$

・Case 2 ：$1 \leqq x_1 < x_2 = x_3 \leqq 12$

の２つのケースに分けておく。Case 1 のときは ${}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$ 通りあり、Case 2 のときは次のように考える。 $x_2 = x_3$ の値が $2,\ 3,\ \cdots,\ 12$ のタイプがあり、そのそれぞれの値の際、 x_1 の値を考えていくことにより、$1+2+3+\cdots+11 = 66$ 通りある。

したがって、全部で $220+66=286$ 通りある。よって、求める確率は $\dfrac{286}{12^4} = \dfrac{143}{864}$ … (答)

この解答も考え方の一つであるから、理解しておきたい。

(3)は一番差のつく問題。具体的な数字ではなく、文字で計算する必要があるところと、数列の和の計算をする必要がるという２点がポイント。時間を意識した中で、この問題を正解できる力があれば、実力は十分にあると考えてよいであろう。

【Ⅳ】

予想配点　20 ／ 100 点	**時間配分の目安**　25 ／ 80 分
問題形式　マークセンス方式	
出題分野　空間座標（数Ｂ）、ベクトル（数Ｂ）	
出題形式　計算	
小問別難易度　※問題難易度：Ｃ難問、Ｂ合否を分ける問題、Ａ正答すべき問題、を示す (1)　[(60)(61)(62)]　B (2)　[(63)(64)(65)(66)(67)(68)(69)(70)(71)]　B (3)　[(72)(73)(74)(75)]　B	
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 空間座標やベクトルの学習は「ハイレベル数学ⅠＡⅡＢ」では５月期に行う。そこで、本問題を解くために必要な考え方はすべて扱っている。	

●解答

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ -2,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,\ 0,\ 4)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトルを $\overrightarrow{n} = (x,\ y,\ z)$ とすると、

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{n}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

$\therefore\ \ -x-2y=0$ …①

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \vec{n}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \vec{n} = 0$

$\therefore \quad -x+4z=0 \quad \cdots$②

①より、$y = -\dfrac{1}{2}x$

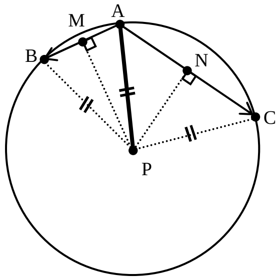
②より、$z = \dfrac{1}{4}x$

よって、$\vec{n} = \left(x,\ -\dfrac{1}{2}x,\ \dfrac{1}{4}x\right) = \dfrac{1}{4}x(4,\ -2,\ 1)$ と変形すると、$\vec{n}$ の１つとして、

$\overrightarrow{n_1} = (4,\ -2,\ 1)$ としておく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$= s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (s,\ t : \text{実数})$$



とかける。

ここで、$\mathrm{AB} = \sqrt{5}$, $\mathrm{AC} = \sqrt{17}$ であり、AB の中点を

M, AC の中点を N としておく。

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AM} = \sqrt{5} \times \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \mathrm{AC} \times \mathrm{AN} = \sqrt{17} \times \dfrac{\sqrt{17}}{2} = \dfrac{17}{2} \end{cases}$$

より、

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left\{ s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \dfrac{5}{2} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left\{ s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \dfrac{17}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 5s + t = \dfrac{5}{2} & \cdots① \\ s + 17t = \dfrac{17}{2} & \cdots② \end{cases}$$

①、②を解くと、$s = \dfrac{17}{42}$, $t = \dfrac{10}{21}$ であるから、O を原点とすると、

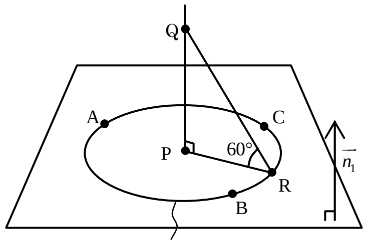
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{17}{42}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+\frac{10}{21}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$$

$\therefore$　P の x 座標は、$1-\dfrac{17}{42}-\dfrac{10}{21}=\boxed{\dfrac{5}{42}}$となる。

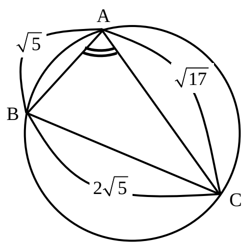
(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{5}$, $\mathrm{AC}=\sqrt{17}$, $\mathrm{BC}=2\sqrt{5}$ だから、余弦定理より、



$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{17})^2-(2\sqrt{5})^2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}}$$

$0°<\angle\mathrm{BAC}<180°$ だから、$\sin\angle\mathrm{BAC}>0$



$$\therefore\quad \sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}}$$

ここで、PR は△ABC の外接円の半径より、正弦定理から

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=2\cdot\mathrm{PR}$$

$$\therefore\quad \mathrm{PR}=\frac{5\sqrt{17}}{2\sqrt{21}}$$

△PQR において、$\angle\mathrm{PRQ}=60°$, $\angle\mathrm{QPR}=90°$ より、

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{3}\mathrm{PR}=\frac{5\sqrt{17}}{2\sqrt{7}}$$

さて、$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\,/\!/\,\vec{n_1}$ であるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\pm\frac{\mathrm{PQ}}{|\vec{n_1}|}\vec{n_1}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\pm\frac{5\sqrt{51}}{42}\vec{n_1}$$

とかけるので、Q の x 座標は、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の x 成分を計算すると、

$$\frac{5}{42}\pm\frac{5\sqrt{51}}{42}\cdot 4$$

$$=\boxed{\frac{5}{42}\pm\frac{10\sqrt{51}}{21}}$$

となる。

(3)　四面体QABCの体積をVとすると、

$$V=\frac{1}{3}\times(\triangle\mathrm{ABC}\text{の面積})\times\mathrm{PQ}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\sin\angle\mathrm{BAC}\right)\times\mathrm{PQ}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{17}\times\frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}}\right)\times\frac{5\sqrt{17}}{2\sqrt{7}}$$

$$=\boxed{\frac{5\sqrt{51}}{6}}$$

である。

●検討すべき点

(1)からして、どのように解くかが難しいところである。しかし、難問ではない。解答例には外心の位置ベクトルを求めてから成分を導入して座標を求める解法を記載しておいた。外心の位置ベクトルを求める問題は典型問題で、その解法をどのように利用できるかで差がつく問題である（もちろん、ノーヒントで解答できる力が必要だが）。

また、(2)では法線ベクトルの理解が必要である。解答例では最初の段階で法線ベクトルのひとつを求めておいた。その法線ベクトルをうまく利用し、座標を求める計算であり、類題経験がないと少し厳しい問題である。また、(1)で時間をとられてしまうと(2)を解く時間は無くなってしまうかもしれない。最後の(3)は、(2)ができればオマケになる問題である。

全体を通して、(1)だけは絶対に得点したい。が、制限時間を考えると、(2)(3)を解く時間は残っていないかもしれない。