Benesse[®] お茶の水ゼミナール

慶應義塾大学 経済学部

数学

総 論

満点 150点	目標得点	100 点	試験時間	80分	偏差値	73
大問数 6	小問数	26				
〔解答形式	て マーク式	16/26 問	短答式	0/26問	記述式	10/26 問
〔問題難易	B度〕 C	0/26問	В	15/26 問	Α	11/26 問

※問題難易度: C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す

Topics

- **1**:大間は6間あり、そのうち前半3間のマーク部分が先に採点される。これと英語の一部の合計点が一定点(基準は不明)に達した答案のみ、残りの記述問題を採点される。
- **2**:マーク問題では、センター試験の形式とは違い、空欄の個数と桁数が一致するとは限らない。 (□□という空欄に対し「02」と入れる場合などがある)
- **3**:問題文は年によって「です・ます調」の場合と「だ・である調」の場合がある。今年は「だ・である調」であった。

こんな力が求められる!

各分野における基本事項、つまり用語の定義や、定理の扱い方などに習熟しておく必要がある。

また、問題量がかなり多いため、基本~標準問題を自力で正確に計算していけるだけの計算力が要求される。マーク形式の問題でも、普段は記述式と思って考えること。

1点2点の差が大きく順位を変動させるといえる。記述問題を中心に、「得点をとれる答案の書き方」に留意していく必要がある。

大 問 別 分 析

[1]

予想配点	30 / 150 点	時間配分の目安 15 / 80 分		
出題分野	放物線と直線で囲まれた面積(数学Ⅱ)			
出題形式	計算			
小問別難易度 ※問題難易度:C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す				
(1)(2)	B $(3)\sim(8)$ B $(9)(10)$ B	(11) (12) B		
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連				
ハイレベル数学ⅠAⅡB6月期4回、センター数学ⅡB6月期3回				

●解答のポイント&学習対策

定番問題ではあるが、グラフの図示をしっかり行っておく必要がある。 積分区間がどう分けられるかを見極めるのがポイント。

●解答

(1)

f(0) = 3 より、直線の方程式は y = g(x) = ax + 3 と表される。

 $a \le -1$ において図は右のようになる。

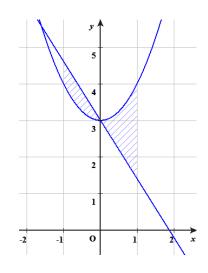
$$I(a) = 3 \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx$$

$$= 3 \left\{ \int_{-1}^{0} (g(x) - f(x)) dx + \int_{0}^{1} (f(x) - g(x)) dx \right\}$$

$$= 3 \left\{ \int_{-1}^{0} (ax - x^{2}) dx + \int_{0}^{1} (x^{2} - ax) dx \right\}$$

$$= 3 \left\{ \left[\frac{1}{2} ax^{2} - \frac{1}{3} x^{3} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3} x^{3} - \frac{1}{2} ax^{2} \right]_{0}^{1} \right\}$$

$$= 3 \left\{ 0 - \left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} a \right) - 0 \right\} = -3a$$



よって、 $a \le -1$ における最小値はa = -1のとき $\boxed{0}$ $\boxed{3}$

(2)

-1≦*a*≦0 において図は右のようになる。

$$y = f(x)$$
 と $y = g(x)$ の交点の x 座標は $x^2 + 3 = ax + 3$ より $x = 0$, a

$$I(a) = 3\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx$$

$$= 3\left\{\int_{-1}^{a} (f(x) - g(x)) dx + \int_{a}^{0} (g(x) - f(x)) dx + \int_{0}^{1} (f(x) - g(x)) dx\right\}$$

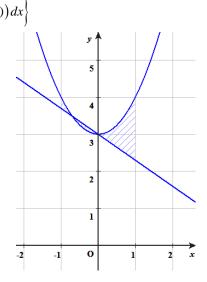
$$= 3\left\{\int_{-1}^{a} (x^{2} - ax) dx + \int_{a}^{0} (ax - x^{2}) dx + \int_{0}^{1} (x^{2} - ax) dx\right\}$$

$$= 3\left\{\left[\frac{1}{3}x^{3} - \frac{1}{2}ax^{2}\right]_{-1}^{a} + \left[\frac{1}{2}ax^{2} - \frac{1}{3}x^{3}\right]_{a}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^{3} - \frac{1}{2}ax^{2}\right]_{0}^{1}\right\}$$

$$= 3\left\{-\frac{1}{6}a^{3} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a\right) + 0 - \frac{1}{6}a^{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a\right)\right\}$$

$$= 3\left(-\frac{1}{3}a^{3} + \frac{2}{3}\right) = \left[-\frac{1}{3}a^{3} + \frac{0}{3}a^{3} + \frac{0}{3}a^{3} + \frac{0}{3}a^{3}\right]_{a}^{a} + \left[-\frac{1}{3}a^{3} + \frac{1}{2}ax^{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= 3\left(-\frac{1}{3}a^{3} + \frac{2}{3}\right) = \left[-\frac{1}{3}a^{3} + \frac{0}{3}a^{3} + \frac{0}{3}a^{3} + \frac{1}{3}a^{3}\right]_{a}^{a} + \left[-\frac{1}{3}a^{3} + \frac{1}{3}a^{3} + \frac{1}{3}a$$



[注]

(2) の計算は、次のようにもできる。

$$I(a) = 3 \left\{ \int_{-1}^{a} (f(x) - g(x)) dx + \int_{a}^{0} (g(x) - f(x)) dx + \int_{0}^{1} (f(x) - g(x)) dx \right\}$$

Benesse[®] お茶の水ゼミナール

$$= 3 \left\{ \int_{-1}^{a} (f(x) - g(x)) dx - \int_{a}^{0} (f(x) - g(x)) dx + \int_{0}^{1} (f(x) - g(x)) dx \right\}$$

$$= 3 \left\{ \int_{-1}^{a} (f(x) - g(x)) dx + \int_{a}^{0} (f(x) - g(x)) dx + \int_{0}^{1} (f(x) - g(x)) dx - 2 \int_{a}^{0} (f(x) - g(x)) dx \right\}$$

$$= 3 \left\{ \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x)) dx - 2 \int_{a}^{0} (f(x) - g(x)) dx \right\}$$

$$= 3 \left\{ \int_{-1}^{1} (x^{2} - ax) dx - 2 \int_{a}^{0} (x^{2} - ax) dx \right\}$$

$$= 6 \left\{ \int_{0}^{1} x^{2} dx - \int_{a}^{0} (x^{2} - ax) dx \right\}$$

$$= 6 \left\{ \left[\frac{1}{3} x^{3} \right]_{0}^{1} - 2 \left[\frac{1}{3} x^{3} - \frac{1}{2} ax^{2} \right]_{a}^{0} \right\} = -a^{3} + 2$$

[2]

予想配点 30 / 150 点 **時間配分の目安** 15 / 80 分

出題分野 確率(数学A)、対数(数学Ⅱ)

出題形式 計算

小問別難易度 ※問題難易度: C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す(13)~(16) A (17)~(20) A (21)(22) B (23)~(28) B

お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連

ハイレベル数学ⅠAⅡB3月期①3回、センター数学ⅡB5月期3回、センター数学ⅠA7月期3回

●解答のポイント&学習対策

問題文の読解、つまり設定の把握が全て。期待値の計算は慎重に行いたい。

●解答

玉の色が同じになる確率は、 $\frac{2}{4C_2} = \frac{1}{3}$ 、異なる確率は $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(1)

n=5 のとき、得点が 2^3 となるためには「1,2回目は玉の色が異なり、3回目は同じ」

$$\mbox{\sharp} \mbox{\circlearrowleft} \mbox{\circlearrowleft} \mbox{\circlearrowleft} \mbox{\circlearrowleft} \mbox{\circlearrowleft} \mbox{$\overset{(13)}{3}$} \mbox{$\overset{(14)}{3}$} \mbox{$\overset{(13)}{3}$} \mbox{$\overset{(14)}{3}$} \mbox{$\overset{(15)}{3}$} \mbox{$\overset{(15)}{3}$$$

得点が **2**⁵ となるためには

「 $1\sim4$ 回目は玉の色が異なり、5回目は同じ」または「 $1\sim5$ 回目すべて玉の色が異なる」 = 「 $1\sim4$ 回目で玉の色が異なれば、5回目はどちらでもよい」

よって
$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{\boxed{1} \boxed{6}}{\boxed{8} \boxed{1}}$$

(2)

得点が 2^{n-1} 以下となることの余事象は、得点が 2^n となることである。

したがって(1)より、得点が2"になる確率が0.01以下であればよい。

(1)と同様にして得点が 2^n になる確率は「 $1 \sim n-1$ 回目において玉の色が異なる」確率である。

よって、
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leq 0.01$$
を満たす。

両辺の底を2とする対数をとると

$$\log_2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leq \log_2\frac{1}{100}$$

$$(n-1)\log_2\frac{2}{3} \le \log_2\frac{1}{2^2 \times 5^2}$$

$$(n-1)(\log_2 2 - \log_2 3) \le -\log_2 (2^2 \times 5^2) = -2(\log_2 2 + \log_2 5)$$

$$(n-1)\times(1-1.585) \le -2\times(1+2.322)$$

$$-0.585n + 0.585 \le -6.644$$

$$-0.585n \le -7.229$$

$$n \ge \frac{7.229}{0.585} = 12.3 \cdots$$

したがって $n \ge \begin{bmatrix} 21 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3)

(1) と同じように、得点が 2^k ($1 \le k \le n-1$) となるのは「 $1 \sim (k-1)$ 回目は玉の色が異なり、k回目

は玉の色が同じ」であればよいので、確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} imes \frac{1}{3}$

また、得点が 2^n となるのは「 $1\sim (n-1)$ 回目で玉の色が異なり、n回目は玉の色が同じ」か

「
$$1\sim n$$
 回目で玉の色が異なる」であればよいので、確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

したがって期待値は、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times 2^{k} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \times 2^{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \times 2^{n}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^n}{1 - \frac{4}{3}} + \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$=-2\left\{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{n}\right\}+\left(\frac{4}{3}\right)^{n}= \boxed{0} \boxed{3} \times \left(\frac{23}{4}\right)^{n} = \boxed{0} \boxed{2} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{n} + \boxed{27} \boxed{2}$$

.....

[3]

 予想配点
 30 / 150 点
 時間配分の目安
 15 / 80 分

 出題分野
 平面ベクトル(数学B)

 出題形式
 計算

 小間別難易度
 ※問題難易度: C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す

 (29) A
 (30)~(33) A
 (34)~(37) A
 (38)~(41) A

 (42)(43) B
 (44) B
 (45)(46) B
 (47) B

●解答のポイント&学習対策

前半部は確実に取るべき。後半はマーク式であることを利用して、厳密さを若干捨てて解を求めるのが 実戦的と言える。ただし(45)~(47)については解けなくても問題はないだろう。

●解答

三角形 OAB =
$$\frac{1}{2} \times |4 \times 5 - 2 \times 3| = \boxed{7}$$

[原点と $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を頂点とする三角形の面積= $\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$]

Cの座標は
$$\left(\frac{2\times4+1\times2}{1+2},\frac{2\times3+1\times5}{1+2}\right) = \left(\frac{10}{3},\frac{11}{3}\right)$$
 より、Dの座標は $\left(\underbrace{11}_{(30)(31)},\underbrace{01}_{(32)(33)}\right)$

点A、点Bの点Oに関する対称点は、それぞれ

$$A\cdots \left(\begin{array}{c|c} \hline & \boxed{4}, \ \hline & \boxed{3} \\ \tiny (34) \ (35) \ (36) \ (37) \end{array} \right), B\cdots \left(\begin{array}{c|c} \hline & \boxed{2}, \ \hline & \boxed{5} \\ \tiny (38) \ (39) \ (40) \ (41) \end{array} \right)$$

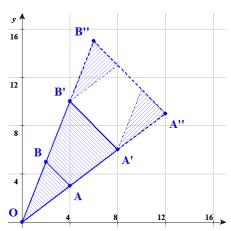
 $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ であることから、

点Pの動く領域は、

「点Oが三角形OA'B'の内部および周上を動く」

条件で三角形 OAB と合同な三角形を動かしたものである。

すると、求める領域 S は右図の $\boxed{3}$ 角形 $\mathbf{OA''B''}$ の内部



および周上全体である。

よって、OA:OA"=1:3より、

面積比が三角形 OAB: 三角形 OA"B" = 1^2 : 3^2 = 1:9

であることから、

S の面積は $7 \times 9 = 6 \boxed{3}$

 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE}$ であることから、

点Pの動く領域は、

「点Oが三角形OA'B'の内部および周上を動く」

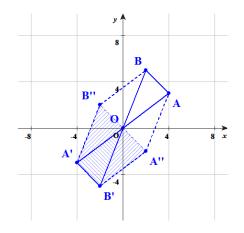
条件で三角形 OAB と合同な三角形を動かしたものである。

すると、求める領域T は右図の 6 角形 ABB''A'B'A'' の内部

および周上全体である。

よって、面積比が三角形 **OAB**: 六角形 **ABB**"A'B'A" =1:6 であることから、

$$S$$
 の面積は $7 \times 6 = 4 2$ である。



[4]

予想配点	20 / 150 点 時間配分の目安 20 / 80 分		
出題分野	剰余の定理(数学Ⅱ)		
出題形式	計算		
小問別難易度 ※問題難易度:C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す			
(1) B	(2) A (3) A (4) A (5) B		
お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連 ハイレベル数学 I A Ⅱ B 3 月期① 1 回			

●解答のポイント&学習対策

剰余の定理を用いる問題としては、(1)のような問題は比較的新しいタイプと言えるが、慶應薬学部では 08 年に出題例がある。同じ大学の他学部で、傾向の類似している商・薬学部などの問題にも目を通しておくと有効だろう。

(1)を利用することで(3)から(4)の流れや(5)も解ける。(1)がポイントである。

●解答

(1)

f(x), g(x) を x についての多項式であるとする。除法の性質より

$$A = (x^2 - a)f(x) + (x+1)$$

$$B = (x^2 - a)g(x) + x$$

と表されるので、

$$AB = \left\{ (x^2 - a)f(x) + (x+1) \right\} \left\{ (x^2 - a)g(x) + x \right\}$$

$$= (x^2 - a)^2 f(x)g(x) + (x^2 - a)\{(x+1)f(x) + xg(x)\} + x(x+1)$$

$$= (x^2 - a)\{(x^2 - a)f(x)g(x) + (x+1)f(x) + xg(x)\} + x^2 + x$$

よって、AB を $x^2 - a$ で割った余りは $x^2 + x$ を $x^2 - a$ で割った余りに等しい。

$$= 2\pi i \pm x^2 + x = 1 \times (x^2 - a) + x + a \pm y + x + a$$

(2)

$$P(x) = x^{150}$$
 とおくと、剰余の定理より $P(x)$ を $x-a$ で割った余りは $P(a) = a^{150}$

(3)

$$x^2 = t$$
 とおくと、 $x^{150} = (x^2)^{75} = t^{75}$ であるから、 t^{75} を $t - a$ で割った余りを考えればよい。

$$R(t) = t^{75}$$
 とおくと、剰余の定理より t^{75} を $t-a$ で割った余りは $R(a) = a^{75}$

よって、
$$x^{150}$$
を x^2-a で割った余りも a^{75}

(4)

(3) において、h(x)をxについての多項式として

$$x^{150} = (x^2 - a)h(x) + a^{75}$$

と表されるので、

$$x^{151} = x \times x^{150} = x \left\{ (x^2 - a)h(x) + a^{75} \right\}$$
$$= (x^2 - a)xh(x) + a^{75}x$$

より、
$$x^{151}$$
を x^2-a で割った余りは $a^{75}x$ である。

(5)

(3) (4) と同様にして、

$$x^{150} = (x^5 - a)h(x) + a^{30}$$
 [$x^5 = t$ とおいて剰余の定理の利用。]

$$x^{151} = x(x^5 - a)h(x) + a^{30}x$$

したがって、 x^{151} を $x^5 - a$ で割った余りは $a^{30}x$ である。

[5]

予想配点 20 / 150 点 時間配分の目安 **出題分野** 対数関数 (数学 II) · 領域 (数学 II) · 接線 (数学 II)

出題形式 計算

小問別難易度 ※問題難易度: C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す (1) A (2) A (3) B

- 7 -

お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連

ハイレベル数学 I A I B ① 3 月期 3 回・4 月期 4 回 センター数学 II B 3 月期 ① 4 回・4 月期 2 回・6 月期 1 回

●解答のポイント&学習対策

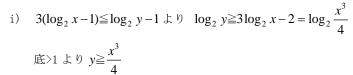
領域の問題としては非常によくある問題である。(1)(2)は確実に、(3)もしっかりものにしたいところ。

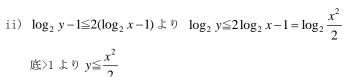
●解答

(1)

$$3(\log_2 x - 1) \leq \log_2 y - 1 \leq 2(\log_2 x - 1) \ \sharp \ \emptyset \ , \ \begin{cases} 3(\log_2 x - 1) \leq \log_2 y - 1 \\ \log_2 y - 1 \leq 2(\log_2 x - 1) \end{cases}$$
 を解く。

まず真数条件より、x>0, y>0。





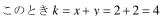
したがって、図の斜線部である(ただし境界線は原点のみ除く)。

(2)

領域 D 内の点の座標 (x, y) について、x + y = k という値をとるような k の値を考える。

よって、

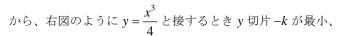
「x+y=k という式で表される直線が領域 D と共有点をもてばよい」。 x+y=k は y=-x+k と変形すると傾き -1 、 y 切片 k の直線を表すから、右図のように (2,2) を通るとき y 切片 k が最大となる。





(2) と同様に、x-y=k という値をとるようなk の値を考える。

「x-y=k という式で表される直線が領域 D と共有点をもてばよい」。 x-y=k は y=x-k と変形すると傾き 1 、y 切片 -k の直線を表す

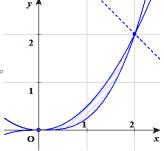


つまりkが最大となる。

ここで、 $y = \frac{x^3}{4}$ の導関数は $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}x^2$ であるから、

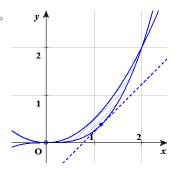
$$y = \frac{x^3}{4}$$
 上の点 $\left(t, \frac{1}{4}t^3\right)$

(ただし領域 D に含まれる必要があるため $0 \le t \le 2$) における接線の方程式は



y 🕈

1



$$y - \frac{t^3}{4} = \frac{3}{4}t^2(x - t)$$

$$y = \frac{3}{4}t^2x - \frac{t^3}{2} \quad \cdots \text{ }$$

接線の傾きが1に等しければよいので、

$$\frac{3}{4}t^2 = 1$$
 かつ $0 \le t \le 2$ より $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$

①に代入して
$$y = x - \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

したがってkの最大値は $k = \frac{4\sqrt{3}}{9}$

.....

[6]

 予想配点
 20 / 150 点
 時間配分の目安
 30 / 80 分

 出題分野
 図形と方程式・領域(数学Ⅱ)

 出題形式
 計算

 小問別難易度
 ※問題難易度: C難問、B合否を分ける問題、A正答すべき問題、を示す(1) B (2) B

 お茶ゼミカリキュラム・テキストとの関連
 ハイレベル数学ⅠAⅡB4月期1回

●解答のポイント&学習対策

今回の問題の中で最も時間がかかるものである。(2)は特に考えあぐねる人が多い。 放物線上の点と円の中心の距離に注目して求めていくが、部分点狙いでも十分。

●解答

(1)

x=0 のとき、集合Aに含まれるのは-|k| < y < |k| の部分。

一方、集合Bに含まれるのは $v \ge -2k$

少なくとも-|k| < y < |k| の部分が $y \ge -2k$ に含まれる必要がある。

k>0 のとき、-2k<-k< y< k であるから、-|k|< y< |k| の部分が $y\ge -2k$ に含まれるので不適。

k < 0 のとき、k < y < -k < -2k であるから、-|k| < y < |k| の部分が $y \ge -2k$ に含まれないので適。

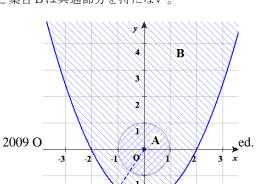
したがって、条件を満たすにはk < 0である必要がある。

逆に、k<0であるとき、集合Aを満たす点のy座標はk< y<-k、集合Bを満たす点のy座標は $y\ge -2k$ 、さらに-k<-2kであるから、常に集合Aと集合Bは共通部分を持たない。

以上より、k < 0

(2)

(1) より、少なくともk > 0が必要である。



図より、「放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2k$ 上の任意の点と、

円 $x^2 + y^2 = k^2$ の中心 (0,0) との距離が常に k 以上である」

条件を満たせばよい。

放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2k$ 上の任意の点を $\left(t, \frac{1}{2}t^2 - 2k\right)$ とおくと、

$$\sqrt{(t-0)^2 + \left(\frac{1}{2}t^2 - 2k - 0\right)^2} \ge k \quad \Leftrightarrow \frac{1}{4}t^4 - (2k-1)t^2 + 3k^2 \ge 0 \quad (k > 0 \ \ \ \ \ \)$$

がすべてのtで成り立てばよい。

よって、 $t^2 = \alpha$ とおいて

「 $\alpha=t^2\ge 0$ において、 $\frac{1}{4}\alpha^2-(2k-1)\alpha+3k^2\ge 0$ が常に成り立つkの範囲」を出せばよい。

$$f(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha^2 - (2k-1)\alpha + 3k^2 \ge 3i < 2i$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{4} \{\alpha - 2(2k-1)\}^2 - k^2 + 4k - 1$$
 と変形することができる。

したがって軸: $\alpha = 2(2k-1)$

(i)
$$\alpha = 2(2k-1) > 0$$
, $\beta = 2(2k-1) > 0$

 $f(\alpha)$ の最小値は $f(2(2k-1)) = -k^2 + 4k - 1$ であるから、 $-k^2 + 4k - 1 \ge 0$ を満たせばよい。

$$-k^2 + 4k - 1 \ge 0$$

 $k^2 - 4k + 1 \le 0$
 $2 - \sqrt{3} \le k \le 2 + \sqrt{3}$
 $k > \frac{1}{2}$ と合わせて $\frac{1}{2} < k \le 2 + \sqrt{3}$

(ii)
$$\alpha = 2(2k-1) < 0$$
、よって $0 < k < \frac{1}{2}$ のとき

 $f(\alpha)$ の最小値は $f(0) = 3k^2$ であるから、つねに条件を満たす。

したがって、(i)(ii)を合わせて $0 < k \le 2 + \sqrt{3}$

[注意]

この問題のように円と放物線の位置関係を考える問題は多い(2009年一橋大学[3]など)。考え方としては「円の中心と放物線上の点の距離」を扱う。

「円が放物線に内接する」という問題の場合、2つの方程式を連立して一文字(主にx)を消去する手を取る人が多いが、これは誤り(不十分)である。円が放物線と接するときでも、他の点では交わってしまっていることも考えられるからである。